

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES Y APLICACIONES

Álvaro Pámpano Llarena

Trabajo de Fin de Master en Modelización e Investigación
Matemática, Estadística y Computación

Dirigido por
Óscar J. Garay Bengoechea

Bilbao, 30 de septiembre de 2015

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción y motivación.
2. Subvariedades de Riemann.
3. Teorema fundamental de superficies.
4. Ecuaciones de Gauss-Codazzi de ciertas superficies notables.

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

Primer objetivo: búsqueda de un **teorema similar** para el caso de superficies en \mathbb{R}^3

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

Primer objetivo: búsqueda de un **teorema similar** para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 (**Teorema de Bonnet**).

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

Primer objetivo: búsqueda de un **teorema similar** para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 (**Teorema de Bonnet**).

En este teorema de Bonnet, aparecen las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**.

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

Primer objetivo: búsqueda de un **teorema similar** para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 (**Teorema de Bonnet**).

En este teorema de Bonnet, aparecen las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**.

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

Segundo objetivo: analizar estas ecuaciones cuando se aplican algunas **propiedades geométricas**

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

Primer objetivo: búsqueda de un **teorema similar** para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 (**Teorema de Bonnet**).

En este teorema de Bonnet, aparecen las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**.

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

Segundo objetivo: analizar estas ecuaciones cuando se aplican algunas **propiedades geométricas** (**Pseudoesféricas, Hasimoto,...**).

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

Primer objetivo: búsqueda de un **teorema similar** para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 (**Teorema de Bonnet**).

En este teorema de Bonnet, aparecen las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**.

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

Segundo objetivo: analizar estas ecuaciones cuando se aplican algunas **propiedades geométricas** (**Pseudoesféricas, Hasimoto,...**).
Y analizar relaciones con otras disciplinas

INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

TEOREMA FUNDAMENTAL DE CURVAS EN \mathbb{R}^3

Primer objetivo: búsqueda de un **teorema similar** para el caso de superficies en \mathbb{R}^3 (**Teorema de Bonnet**).

En este teorema de Bonnet, aparecen las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**.

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

Segundo objetivo: analizar estas ecuaciones cuando se aplican algunas **propiedades geométricas** (**Pseudoesféricas, Hasimoto,...**).
Y analizar relaciones con otras disciplinas (**Ecuaciones Diferenciales, Física,...**).

SUBVARIETADES DE RIEMANN

1. Subvariedades de Riemann.
2. Ecuaciones fundamentales.
3. Superficies de \mathbb{R}^3 .

SUBVARIETADES DE RIEMANN

Sean (\tilde{M}, \tilde{g}) y (M, g) dos variedades de Riemann de dimensión m y n , respectivamente.

SUBVARIIDADES DE RIEMANN

Sean (\tilde{M}, \tilde{g}) y (M, g) dos variedades de Riemann de dimensión m y n , respectivamente.

SUBVARIEDAD DE RIEMANN

Diremos que M es una **subvariedad inmersa de Riemann de \tilde{M}** si M es una subvariedad inmersa y g es la métrica inducida.

SUBVARIIDADES DE RIEMANN

Sean (\tilde{M}, \tilde{g}) y (M, g) dos variedades de Riemann de dimensión m y n , respectivamente.

SUBVARIEDAD DE RIEMANN

Diremos que M es una **subvariedad inmersa de Riemann de \tilde{M}** si M es una subvariedad inmersa y g es la métrica inducida.

O, equivalentemente, si existe una aplicación $\Phi: M \rightarrow \tilde{M}$ que verifica:

SUBVARIIDADES DE RIEMANN

Sean (\tilde{M}, \tilde{g}) y (M, g) dos variedades de Riemann de dimensión m y n , respectivamente.

SUBVARIEDAD DE RIEMANN

Diremos que M es una **subvariedad inmersa de Riemann de \tilde{M}** si M es una subvariedad inmersa y g es la métrica inducida.

O, equivalentemente, si existe una aplicación $\Phi: M \rightarrow \tilde{M}$ que verifica:

1. Φ es una **inmersión**.

SUBVARIIDADES DE RIEMANN

Sean (\tilde{M}, \tilde{g}) y (M, g) dos variedades de Riemann de dimensión m y n , respectivamente.

SUBVARIEDAD DE RIEMANN

Diremos que M es una **subvariedad inmersa de Riemann de \tilde{M}** si M es una subvariedad inmersa y g es la métrica inducida.

O, equivalentemente, si existe una aplicación $\Phi: M \rightarrow \tilde{M}$ que verifica:

1. Φ es una **inmersión**.
2. $g = \Phi^* \tilde{g}$.

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Sean $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \nu \in \mathcal{N}(M)$, entonces se verifican las siguientes ecuaciones:

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Sean $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \nu \in \mathcal{N}(M)$, entonces se verifican las siguientes ecuaciones:

ECUACIÓN DE GAUSS

$$\begin{aligned} \tilde{R}m(X, Y, Z, T) = \\ Rm(X, Y, Z, T) - \langle II(X, Z), II(Y, T) \rangle + \langle II(Y, Z), II(X, T) \rangle \end{aligned}$$

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Sean $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \nu \in \mathcal{N}(M)$, entonces se verifican las siguientes ecuaciones:

ECUACIÓN DE GAUSS

$$\begin{aligned} \tilde{R}m(X, Y, Z, T) = \\ Rm(X, Y, Z, T) - \langle II(X, Z), II(Y, T) \rangle + \langle II(Y, Z), II(X, T) \rangle \end{aligned}$$

ECUACIÓN DE CODAZZI

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = \mathcal{D}_Y II(X, Z) - II(X, \nabla_Y Z) - II(\nabla_Y X, Z) - \\ \mathcal{D}_X II(Y, Z) + II(Y, \nabla_X Z) + II(\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Sean $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ y $\xi, \nu \in \mathcal{N}(M)$, entonces se verifican las siguientes ecuaciones:

ECUACIÓN DE GAUSS

$$\begin{aligned} \tilde{R}m(X, Y, Z, T) = \\ Rm(X, Y, Z, T) - \langle II(X, Z), II(Y, T) \rangle + \langle II(Y, Z), II(X, T) \rangle \end{aligned}$$

ECUACIÓN DE CODAZZI

$$\begin{aligned} (\tilde{R}(X, Y)Z)^\perp = \mathcal{D}_Y II(X, Z) - II(X, \nabla_Y Z) - II(\nabla_Y X, Z) - \\ \mathcal{D}_X II(Y, Z) + II(Y, \nabla_X Z) + II(\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

ECUACIÓN DE RICCI

$$\begin{aligned} \tilde{R}m(X, Y, \xi, \nu) = \\ Rm^D(X, Y, \xi, \nu) + \langle II(X, A_\xi Y), \nu \rangle - \langle II(Y, A_\xi X), \nu \rangle \end{aligned}$$

SUPERFICIES DE \mathbb{R}^3

SUPERFICIE EN \mathbb{R}^3

Una **superficie S** es una subvariedad inmersa de Riemann de codimensión uno del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

SUPERFICIES DE \mathbb{R}^3

SUPERFICIE EN \mathbb{R}^3

Una **superficie S** es una subvariedad inmersa de Riemann de codimensión uno del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

En este caso las **ecuaciones fundamentales** se simplifican respecto a un sistema de coordenadas:

SUPERFICIES DE \mathbb{R}^3

SUPERFICIE EN \mathbb{R}^3

Una **superficie S** es una subvariedad inmersa de Riemann de codimensión uno del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

En este caso las **ecuaciones fundamentales** se simplifican respecto a un sistema de coordenadas:

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

$$1) K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$2) e_v - f_u = e\Gamma_{21}^1 + f(\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2$$

$$3) f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2$$

ECUACIÓN DE GAUSS (TEORÍA CLÁSICA)

Observémos que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

es la definición de **curvatura de Gauss** en la teoría clásica de superficies.

ECUACIÓN DE GAUSS (TEORÍA CLÁSICA)

Observémos que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

es la definición de **curvatura de Gauss** en la teoría clásica de superficies.

Por otra parte, en la teoría de subvariedades se tiene el **teorema Egregio de Gauss** directamente de la definición de curvatura,

ECUACIÓN DE GAUSS (TEORÍA CLÁSICA)

Observémos que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

es la definición de **curvatura de Gauss** en la teoría clásica de superficies.

Por otra parte, en la teoría de subvariedades se tiene el **teorema Egregio de Gauss** directamente de la definición de curvatura, de donde se saca la **ecuación de Gauss**,

$$(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - FK.$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES

1. Versión local.
2. Esquema de la demostración.
3. Versión global.

VERSIÓN LOCAL

Dada una **superficie de \mathbb{R}^3** se pueden definir seis **funciones E, F, G** y **e, f, g** en un abierto que verifican las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**.

VERSIÓN LOCAL

Dada una **superficie de \mathbb{R}^3** se pueden definir seis **funciones E, F, G y e, f, g** en un abierto que verifican las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**. Y de forma recíproca, se obtiene el

VERSIÓN LOCAL

Dada una **superficie de \mathbb{R}^3** se pueden definir seis **funciones E, F, G** y **e, f, g** en un abierto que verifican las ecuaciones de **Gauss-Codazzi**. Y de forma recíproca, se obtiene el

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES

Dadas **seis funciones E, F, G** y **e, f, g** verificando las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** existe un abierto U y una función $\mathbf{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{x}(U)$ es una superficie de \mathbb{R}^3 .

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Se **definen** las matrices,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Se **definen** las matrices,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** equivalen a la ecuación de **compatibilidad** del teorema de **Frobenius**.

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Se **definen** las matrices,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \frac{fF-eG}{EG-F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \frac{eF-fE}{EG-F^2} \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF-fG}{EG-F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF-gE}{EG-F^2} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** equivalen a la ecuación de **compatibilidad** del teorema de **Frobenius**.
3. Existe $\mathbb{V} = (w_1, w_2, w_3)$ solución de

$$\begin{cases} \mathbb{V}_u = \mathbb{V}\mathbb{P} \\ \mathbb{V}_v = \mathbb{V}\mathbb{Q} \\ \mathbb{V}|_{(u_0, v_0)} = (e_1, e_2, e_3) = I_3 \end{cases}.$$

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Se **definen** las matrices,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** equivalen a la ecuación de **compatibilidad** del teorema de **Frobenius**.
3. Existe $\mathbb{V} = (w_1, w_2, w_3)$ solución de

$$\begin{cases} \mathbb{V}_u = \mathbb{V}\mathbb{P} \\ \mathbb{V}_v = \mathbb{V}\mathbb{Q} \\ \mathbb{V}|_{(u_0, v_0)} = (e_1, e_2, e_3) = I_3 \end{cases}.$$

4. Por las **propiedades** de \mathbb{V}

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Se **definen** las matrices,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** equivalen a la ecuación de **compatibilidad** del teorema de **Frobenius**.
3. Existe $\mathbb{V} = (w_1, w_2, w_3)$ solución de

$$\begin{cases} \mathbb{V}_u = \mathbb{V}\mathbb{P} \\ \mathbb{V}_v = \mathbb{V}\mathbb{Q} \\ \mathbb{V}|_{(u_0, v_0)} = (e_1, e_2, e_3) = I_3 \end{cases}.$$

4. Por las **propiedades** de \mathbb{V} y aplicando de nuevo **Frobenius** se demuestra la **existencia**.

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Se **definen** las matrices,

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \\ f & g & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** equivalen a la ecuación de **compatibilidad** del teorema de **Frobenius**.
3. Existe $\mathbb{V} = (w_1, w_2, w_3)$ solución de

$$\begin{cases} \mathbb{V}_u = \mathbb{V}\mathbb{P} \\ \mathbb{V}_v = \mathbb{V}\mathbb{Q} \\ \mathbb{V}|_{(u_0, v_0)} = (e_1, e_2, e_3) = I_3 \end{cases}.$$

4. Por las **propiedades** de \mathbb{V} y aplicando de nuevo **Frobenius** se demuestra la **existencia**.
5. Finalmente, por el **teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales** se demuestra la **unicidad**.

VERSIÓN GLOBAL

Sea S una superficie conexa, orientada y simplemente conexa.

VERSIÓN GLOBAL

Sea S una superficie conexa, orientada y simplemente conexa.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES

Equivalencia entre la existencia de dos formas cuadráticas simétricas (I, II) que verifiquen las ecuaciones de Gauss-Codazzi con la existencia y unicidad (salvo movimientos rígidos) de una inmersión $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

VERSIÓN GLOBAL

Sea S una superficie conexa, orientada y simplemente conexa.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES

Equivalencia entre la existencia de dos formas cuadráticas simétricas (I, II) que verifiquen las ecuaciones de Gauss-Codazzi con la existencia y unicidad (salvo movimientos rígidos) de una inmersión $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Podemos ver que hay superficies que no se pueden meter isométricamente en \mathbb{R}^3 :

VERSIÓN GLOBAL

Sea S una superficie conexa, orientada y simplemente conexa.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES

Equivalencia entre la existencia de dos formas cuadráticas simétricas (I, II) que verifiquen las ecuaciones de Gauss-Codazzi con la existencia y unicidad (salvo movimientos rígidos) de una inmersión $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Podemos ver que hay superficies que no se pueden meter isométricamente en \mathbb{R}^3 :

1. $\mathbb{H}^2(-1)$ (Teorema de Hilbert).

VERSIÓN GLOBAL

Sea S una superficie conexa, orientada y simplemente conexa.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES

Equivalencia entre la existencia de **dos formas cuadráticas simétricas** (I, II) que verifiquen las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** con la existencia y unicidad (salvo movimientos rígidos) de una inmersión $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Podemos ver que hay superficies que no se pueden meter isométricamente en \mathbb{R}^3 :

1. $\mathbb{H}^2(-1)$ (Teorema de Hilbert).
2. Toro Llano (Existencia de Puntos Elípticos).

VERSIÓN GLOBAL

Sea S una superficie conexa, orientada y simplemente conexa.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES

Equivalencia entre la existencia de dos formas cuadráticas simétricas (I, II) que verifiquen las ecuaciones de Gauss-Codazzi con la existencia y unicidad (salvo movimientos rígidos) de una inmersión $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Podemos ver que hay superficies que no se pueden meter isométricamente en \mathbb{R}^3 :

1. $\mathbb{H}^2(-1)$ (Teorema de Hilbert).
2. Toro Llano (Existencia de Puntos Elípticos).
3. Plano Proyectivo (No es orientable).

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI DE CIERTAS SUPERFICIES NOTABLES

1. Ecuación de Sine-Gordon.
2. Superficies Pseudoesféricas.
3. Superficies de Hasimoto.
4. Ecuación de Schrodinger.
5. Varillas Elásticas de Kirchhoff.
6. Método de construcción.
7. Superficies de Hasimoto con Filamentos Planos.

ECUACIÓN DE SINE-GORDON

Sea S con curvatura de Gauss $K = k_1 k_2 = -1$:

ECUACIÓN DE SINE-GORDON

Sea S con curvatura de Gauss $K = k_1 k_2 = -1$:

1. $k_1 \neq k_2$.

ECUACIÓN DE SINE-GORDON

Sea S con curvatura de Gauss $K = k_1 k_2 = -1$:

1. $k_1 \neq k_2$.
2. No existen **puntos umbilicales** ($k_1 = k_2$).

ECUACIÓN DE SINE-GORDON

Sea S con curvatura de Gauss $K = k_1 k_2 = -1$:

1. $k_1 \neq k_2$.
2. No existen **puntos umbilicales** ($k_1 = k_2$).
3. Existe parametrización por **líneas de curvatura**.

ECUACIÓN DE SINE-GORDON

Sea S con curvatura de Gauss $K = k_1 k_2 = -1$:

1. $k_1 \neq k_2$.
2. No existen **puntos umbilicales** ($k_1 = k_2$).
3. Existe parametrización por **líneas de curvatura**.

Bajo esta parametrización las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** se reducen a

ECUACIÓN DE SINE-GORDON

Sea S con curvatura de Gauss $K = k_1 k_2 = -1$:

1. $k_1 \neq k_2$.
2. No existen puntos umbilicales ($k_1 = k_2$).
3. Existe parametrización por líneas de curvatura.

Bajo esta parametrización las ecuaciones de Gauss-Codazzi se reducen a

$$\phi_{uu} - \phi_{vv} = \sin \phi \cos \phi,$$

la ecuación de Sine-Gordon.

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (1)

Por el teorema fundamental de superficies,

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (1)

Por el teorema fundamental de superficies, dada una **solución** ϕ de la ecuación de Sine-Gordon, existe una superficie de \mathbb{R}^3 con $K = -1$,

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (1)

Por el teorema fundamental de superficies, dada una **solución** ϕ de la ecuación de Sine-Gordon, existe una superficie de \mathbb{R}^3 con $K = -1$, **superficie pseudoesférica**.

EJEMPLO

La solución $\phi = \arcsin(\operatorname{sech} u)$

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (1)

Por el teorema fundamental de superficies, dada una **solución** ϕ de la ecuación de Sine-Gordon, existe una superficie de \mathbb{R}^3 con $K = -1$, **superficie pseudoesférica**.

EJEMPLO

La solución $\phi = \arcsin(\operatorname{sech} u)$ se corresponde con la **pseudoesfera**.

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (1)

Por el teorema fundamental de superficies, dada una **solución** ϕ de la ecuación de Sine-Gordon, existe una superficie de \mathbb{R}^3 con $K = -1$, **superficie pseudoesférica**.

EJEMPLO

La solución $\phi = \arcsin(\operatorname{sech} u)$ se corresponde con la **pseudoesfera**.

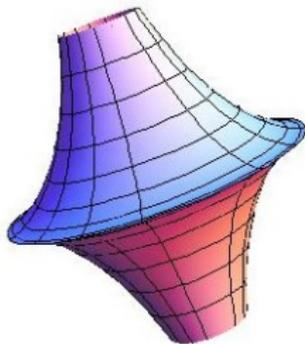


FIGURE: Pseudo-Esfera.

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (2)

De forma inversa

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (2)

De forma inversa dada una **superficie pseudoesférica** en \mathbb{R}^3 , existe una **solución** ϕ de la ecuación de **Sine-Gordon**.

SUPERFICIES PSEUDOESFÉRICAS (2)

De forma inversa dada una **superficie pseudoesférica** en \mathbb{R}^3 , existe una **solución** ϕ de la ecuación de **Sine-Gordon**.

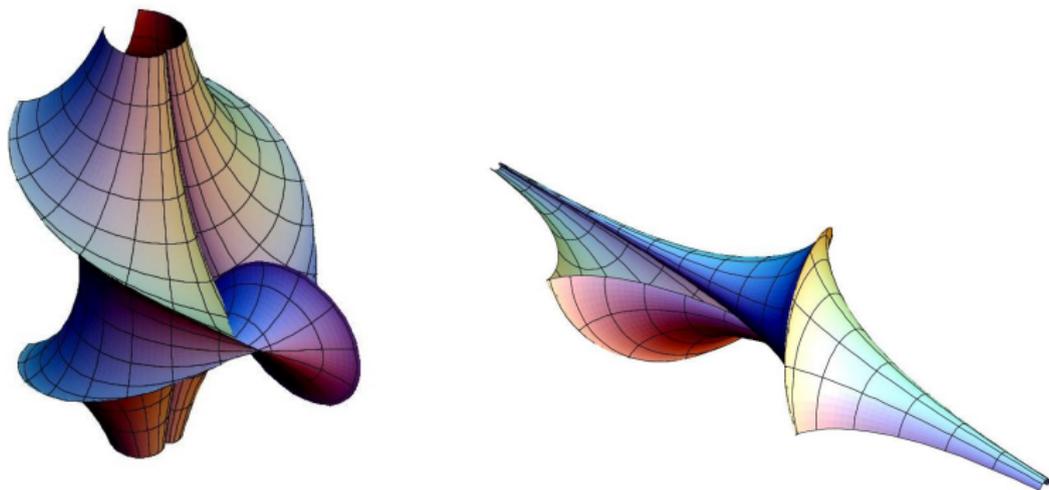


FIGURE: Superficies con $K = -1$.

SUPERFICIES DE HASIMOTO (1)

SUPERFICIES DE HASIMOTO (1)

ECUACIÓN DE INDUCCIÓN LOCALIZADA

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_{ss}$$

SUPERFICIES DE HASIMOTO (1)

ECUACIÓN DE INDUCCIÓN LOCALIZADA

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_{ss}$$

Propiedades:

1. Si $\mathbf{x}(s, 0)$ (condición inicial) está parametrizada por la longitud de arco, entonces $\mathbf{x}(s, t)$ también lo está, para todo t .

SUPERFICIES DE HASIMOTO (1)

ECUACIÓN DE INDUCCIÓN LOCALIZADA

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_{ss}$$

Propiedades:

1. Si $\mathbf{x}(s, 0)$ (condición inicial) está parametrizada por la longitud de arco, entonces $\mathbf{x}(s, t)$ también lo está, para todo t .
2. En este caso, $\mathbf{x}_t = k\mathbf{b}$ (flujo binormal).

SUPERFICIES DE HASIMOTO (1)

ECUACIÓN DE INDUCCIÓN LOCALIZADA

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s \wedge \mathbf{x}_{ss}$$

Propiedades:

1. Si $\mathbf{x}(s, 0)$ (condición inicial) está parametrizada por la longitud de arco, entonces $\mathbf{x}(s, t)$ también lo está, para todo t .
2. En este caso, $\mathbf{x}_t = k\mathbf{b}$ (flujo binormal).

SUPERFICIES DE HASIMOTO

Las superficies generadas por el flujo binormal se llaman superficies de Hasimoto.

SUPERFICIES DE HASIMOTO (2)

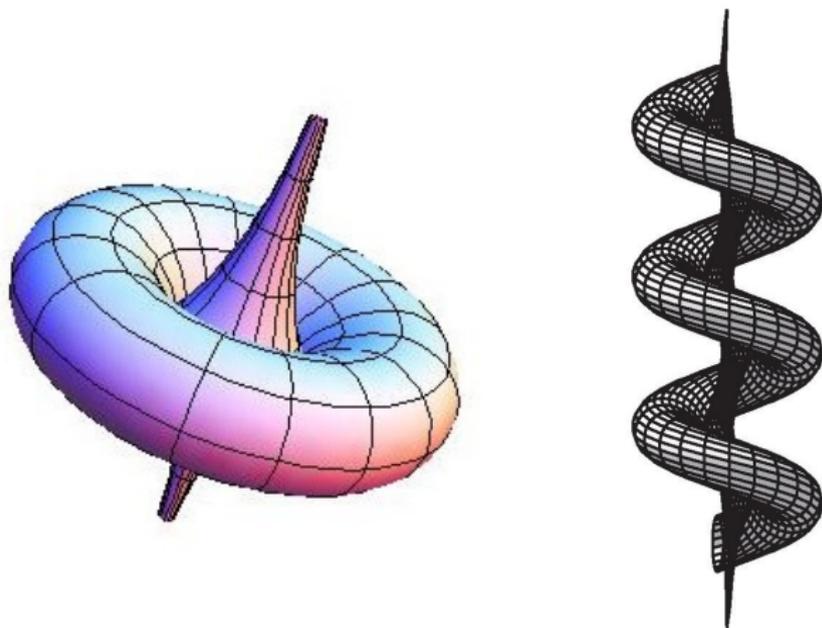


FIGURE: Superficies de Hasimoto.

ECUACIÓN DE SCHRODINGER

Sea S una [superficie de Hasimoto](#),

ECUACIÓN DE SCHRODINGER

Sea S una **superficie de Hasimoto**, entonces las ecuaciones de **Gauss-Codazzi** se simplifican, obteniendo:

ECUACIONES DE DA RIOS

$$\begin{cases} k_t = -2\tau k_s - k\tau_s \\ \tau_t = \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{k_{ss}}{k} - \tau^2\right)_s \end{cases}$$

ECUACIÓN DE SCHRODINGER

Sea S una [superficie de Hasimoto](#), entonces las ecuaciones de [Gauss-Codazzi](#) se simplifican, obteniendo:

ECUACIONES DE DA RIOS

$$\begin{cases} k_t = -2\tau k_s - k\tau_s \\ \tau_t = \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{k_{ss}}{k} - \tau^2\right)_s \end{cases}$$

Utilizando la [transformación de Hasimoto](#) o curvatura compleja

$$\Psi = ke^{i\int_{s_0}^s \tau ds^*},$$

ECUACIÓN DE SCHRODINGER

Sea S una [superficie de Hasimoto](#), entonces las ecuaciones de [Gauss-Codazzi](#) se simplifican, obteniendo:

ECUACIONES DE DA RIOS

$$\begin{cases} k_t = -2\tau k_s - k\tau_s \\ \tau_t = \left(\frac{1}{2}k^2 + \frac{k_{ss}}{k} - \tau^2\right)_s \end{cases}$$

Utilizando la [transformación de Hasimoto](#) o curvatura compleja

$$\Psi = ke^{i\int_{s_0}^s \tau ds^*},$$

se obtiene que las ecuaciones de [Gauss-Codazzi-Da Rios](#) se reducen a la [ecuación de Schrodinger no lineal](#)

$$\Psi_{ss} + i\Psi_t + \frac{1}{2}\|\Psi\|^2\Psi = 0.$$

VARILLAS ELÁSTICAS DE KIRCHHOFF

Sea $\tilde{\gamma}$ una **varilla** o curva referencial.

VARILLAS ELÁSTICAS DE KIRCHHOFF

Sea $\tilde{\gamma}$ una **varilla** o curva referencial. Es decir,
 $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \mathbf{t}(t), \mathbf{m}_1(t), \mathbf{m}_2(t))$.

VARILLAS ELÁSTICAS DE KIRCHHOFF

Sea $\tilde{\gamma}$ una **varilla** o curva referencial. Es decir,
 $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \mathbf{t}(t), \mathbf{m}_1(t), \mathbf{m}_2(t))$.

VARILLA ELÁSTICA DE KIRCHHOFF

Una varilla $\tilde{\gamma}$ es una **varilla elástica de Kirchhoff** si es un punto crítico del funcional

$$E(\tilde{\gamma}) = \int_{\gamma} \alpha k^2 + \beta m^2 dt.$$

VARILLAS ELÁSTICAS DE KIRCHHOFF

Sea $\tilde{\gamma}$ una **varilla** o curva referencial. Es decir,
 $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \mathbf{t}(t), \mathbf{m}_1(t), \mathbf{m}_2(t))$.

VARILLA ELÁSTICA DE KIRCHHOFF

Una varilla $\tilde{\gamma}$ es una **varilla elástica de Kirchhoff** si es un punto crítico del funcional

$$E(\tilde{\gamma}) = \int_{\gamma} \alpha k^2 + \beta m^2 dt.$$

Una curva γ es la **línea de centros de una varilla elástica** si y sólo si γ es un punto crítico de

$$\mathcal{F}(\gamma) = \lambda_3 \int_{\gamma} (k^2 + \mu) dt + \lambda_2 \int_{\gamma} \tau dt.$$

MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN

MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN

Tomemos γ una **línea de centros** de una varilla elástica de Kirchhoff, entonces:

MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN

Tomemos γ una **línea de centros** de una varilla elástica de Kirchhoff, entonces:

1. $\mathcal{I} = \lambda_2 \mathbf{t} + \lambda_3 k \mathbf{b}$ es un **campo de Killing** sobre γ .

MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN

Tomemos γ una **línea de centros** de una varilla elástica de Kirchhoff, entonces:

1. $\mathcal{I} = \lambda_2 \mathbf{t} + \lambda_3 \mathbf{k}\mathbf{b}$ es un **campo de Killing sobre γ** .
2. \mathcal{I} se extiende a un **campo de Killing de \mathbb{R}^3** .

MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN

Tomemos γ una **línea de centros** de una varilla elástica de Kirchhoff, entonces:

1. $\mathcal{I} = \lambda_2 \mathbf{t} + \lambda_3 k \mathbf{b}$ es un **campo de Killing sobre γ** .
2. \mathcal{I} se extiende a un **campo de Killing de \mathbb{R}^3** .
3. γ evoluciona bajo la **ecuación de inducción localizada** junto con un **deslizamiento**.

MÉTODO DE CONSTRUCCIÓN

Tomemos γ una **línea de centros** de una varilla elástica de Kirchhoff, entonces:

1. $\mathcal{I} = \lambda_2 \mathbf{t} + \lambda_3 k \mathbf{b}$ es un **campo de Killing sobre γ** .
2. \mathcal{I} se extiende a un **campo de Killing de \mathbb{R}^3** .
3. γ evoluciona bajo la **ecuación de inducción localizada** junto con un **deslizamiento**.
4. La superficie generada se puede reparametrizar para obtener una **superficie de Hasimoto**.

SUPERFICIES DE HASIMOTO (3)

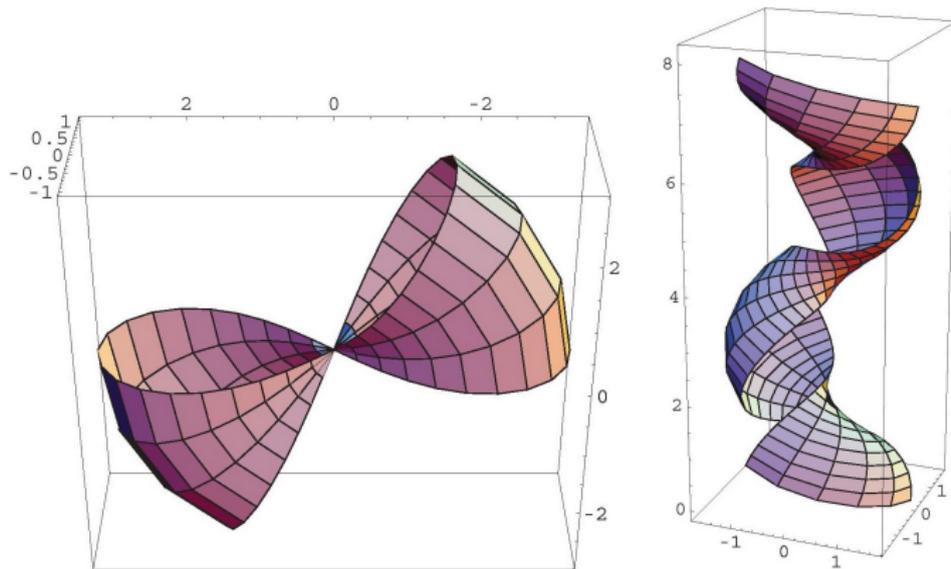


FIGURE: Superficies de Hasimoto.

SUPERFICIES DE HASIMOTO CON FILAMENTOS PLANOS

Consideremos el caso de filamentos planos ($\tau = 0$).

SUPERFICIES DE HASIMOTO CON FILAMENTOS PLANOS

Consideremos el caso de filamentos planos ($\tau = 0$).

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI-DA RIOS

$$\begin{cases} k_t = 0 \\ \frac{1}{2}k^3 + k_{ss} = \nu k \end{cases}$$

SUPERFICIES DE HASIMOTO CON FILAMENTOS PLANOS

Consideremos el caso de filamentos planos ($\tau = 0$).

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI-DA RIOS

$$\begin{cases} k_t = 0 \\ \frac{1}{2}k^3 + k_{ss} = \nu k \end{cases}$$

Y combinando adecuadamente las ecuaciones de [inducción localizada](#), [Gauss-Codazzi-Da Rios](#) y [Frenet](#) se concluye el

SUPERFICIES DE HASIMOTO CON FILAMENTOS PLANOS

Consideremos el caso de filamentos planos ($\tau = 0$).

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI-DA RIOS

$$\begin{cases} k_t = 0 \\ \frac{1}{2}k^3 + k_{ss} = \nu k \end{cases}$$

Y combinando adecuadamente las ecuaciones de **inducción localizada**, **Gauss-Codazzi-Da Rios** y **Frenet** se concluye el

TEOREMA [KIDA]

Una **superficie de Hasimoto con filamentos planos** es o un **cilindro circular recto** o una **superficie de revolución** generada por una **elástica plana**.

REFERENCIAS

- B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry, δ -invariants and Applications*, World Scientific, 2011.

- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Vol. I-V, Houston, 1999.

REFERENCIAS

- M. Avendaño, Teorema Fundamental de Superficies y Criterio de Frobenius, Tesis de Grado.

REFERENCIAS

- O. J. Garay, A. Pámpano y C. Woo, Hypersurface Constrained Elasticity in Lorentzian Space Forms, Invited contribution to Advances in Mathematical Physics.

REFERENCIAS

- M. Avendaño, Teorema Fundamental de Superficies y Criterio de Frobenius, Tesis de Grado.
- B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry, δ -invariants and Applications*, World Scientific, 2011.
- O. J. Garay, A. Pámpano y C. Woo, Hypersurface Constrained Elasticae in Lorentzian Space Forms, Invited contribution to Advances in Mathematical Physics.
- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* Vol. I-V, Houston, 1999.

FIN

