Superficies de Revolución Compactas con Curvatura Media Constante

Álvaro Pámpano Llarena

Seminario de Jóvenes Investigadores en Matemáticas

Granada, 21 de Noviembre de 2017

Objetivos

Objetivos

Objetivo 1

Caracterizar la curva perfil de las superficies de revolución con CMC en las formas de espacio

Objetivos

Objetivo 1

Caracterizar la curva perfil de las superficies de revolución con CMC en las formas de espacio como extremos de una extensión de un problema variacional estudiado por Blaschke.

Objetivos

Objetivo 1

Caracterizar la curva perfil de las superficies de revolución con CMC en las formas de espacio como extremos de una extensión de un problema variacional estudiado por Blaschke.

- Construcción de las superficies de revolución con CMC como superficies de evolución binormal para una cierta velocidad.

Objetivos

Objetivo 1

Caracterizar la curva perfil de las superficies de revolución con CMC en las formas de espacio como extremos de una extensión de un problema variacional estudiado por Blaschke.

- Construcción de las superficies de revolución con CMC como superficies de evolución binormal para una cierta velocidad.
- Utilizando este método, estudiar la compacidad.

Objetivos

Objetivo 1

Caracterizar la curva perfil de las superficies de revolución con CMC en las formas de espacio como extremos de una extensión de un problema variacional estudiado por Blaschke.

- Construcción de las superficies de revolución con CMC como superficies de evolución binormal para una cierta velocidad.
- Utilizando este método, estudiar la compacidad.

Objetivo 2

Clasificar las superfices de revolución compactas con CMC.

Índice

Índice

Índice

Índice

Índice

1. Introducción a las Formas de Espacio
2. Superficies de Revolución con Curvatura Media Constante
3. Construcción de las Superficies de Revolución con CMC
4. Estudio de la Compacidad

Introducción

1. Formas de Espacio

Introducción

1. Formas de Espacio
2. Campos de Killing

Introducción

1. Formas de Espacio
2. Campos de Killing
3. Superficies de Revolución

Introducción

1. Formas de Espacio
2. Campos de Killing
3. Superficies de Revolución
4. Curvas de Frenet

Formas de Espacio

Forma de Espacio $M^3(\rho)$

Formas de Espacio

Forma de Espacio $M^3(\rho)$

Una 3-variedad Riemanniana completa, conexa y simplemente conexa con curvatura seccional constante ρ.

Formas de Espacio

Forma de Espacio $M^3(\rho)$

Una 3-variedad Riemanniana completa, conexa y simplemente conexa con curvatura seccional constante ρ.

Para cada una de ellas, existe una inmersión isométrica en el espacio $\mathbb{E}^4_r$.

Forma de Espacio $M^3(\rho)$

Una 3-variedad Riemanniana completa, conexa y simplemente conexa con curvatura seccional constante ρ.

Para cada una de ellas, existe una inmersión isométrica en el espacio $\mathbb{E}^4_r$. Es decir, $\mathbb{R}^4$ con la métrica

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + (-1)^r dx_4^2 \, .$$

Formas de Espacio

Forma de Espacio $M^3(\rho)$

Una 3-variedad Riemanniana completa, conexa y simplemente conexa con curvatura seccional constante ρ.

Para cada una de ellas, existe una inmersión isométrica en el espacio $\mathbb{E}^4_r$. Es decir, $\mathbb{R}^4$ con la métrica

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + (-1)^r dx_4^2 \,.$$

1. Si $\rho = 0$, tenemos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4_o \,|\, x_4 = 0\} \,.$$

Formas de Espacio

Forma de Espacio $M^3(\rho)$

Una 3-variedad Riemanniana completa, conexa y simplemente conexa con curvatura seccional constante ρ.

Para cada una de ellas, existe una inmersión isométrica en el espacio $\mathbb{E}^4_r$. Es decir, $\mathbb{R}^4$ con la métrica

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + (-1)^r dx_4^2 \,.$$

1. Si $\rho = 0$, tenemos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$,
$$\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4_o \,|\, x_4 = 0\} \,.$$
2. Si $\rho > 0$, $M^3(\rho)$ se corresponde con la esfera $\mathbb{S}^3(\rho)$,
$$\mathbb{S}^3(\rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^4_o \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \tfrac{1}{\rho}\} \,.$$

Formas de Espacio

Forma de Espacio $M^3(\rho)$

Una 3-variedad Riemanniana completa, conexa y simplemente conexa con curvatura seccional constante ρ.

Para cada una de ellas, existe una inmersión isométrica en el espacio $\mathbb{E}^4_r$. Es decir, $\mathbb{R}^4$ con la métrica

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + (-1)^r dx_4^2 \, .$$

1. Si $\rho = 0$, tenemos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$,
$$\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4_o \,|\, x_4 = 0\} \, .$$
2. Si $\rho > 0$, $M^3(\rho)$ se corresponde con la esfera $\mathbb{S}^3(\rho)$,
$$\mathbb{S}^3(\rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^4_o \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \tfrac{1}{\rho}\} \, .$$
3. Finalmente, si $\rho < 0$ obtenemos el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$,
$$\mathbb{H}^3(\rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^4_1 \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \tfrac{1}{\rho}\} \, .$$

Caracterización de las Formas de Espacio

Caracterización de las Formas de Espacio

Las formas de espacio se pueden caracterizar como las únicas 3-variedades de Riemann M que verifican

Caracterización de las Formas de Espacio

Las formas de espacio se pueden caracterizar como las únicas 3-variedades de Riemann M que verifican

- Son simplemente conexas.

Caracterización de las Formas de Espacio

Las formas de espacio se pueden caracterizar como las únicas 3-variedades de Riemann M que verifican

- Son simplemente conexas.
- Son espacios homogéneos (para todo par de puntos en M, existe una isometría que lleva uno en el otro).

Caracterización de las Formas de Espacio

Las formas de espacio se pueden caracterizar como las únicas 3-variedades de Riemann M que verifican

- Son simplemente conexas.
- Son espacios homogéneos (para todo par de puntos en M, existe una isometría que lleva uno en el otro).
- La dimensión del grupo de isometrías $Iso(M)$ es la máxima posible, 6.

Caracterización de las Formas de Espacio

Las formas de espacio se pueden caracterizar como las únicas 3-variedades de Riemann M que verifican

- Son simplemente conexas.
- Son espacios homogéneos (para todo par de puntos en M, existe una isometría que lleva uno en el otro).
- La dimensión del grupo de isometrías $Iso(M)$ es la máxima posible, 6.

Podemos entender el grupo de isometrías $Iso(M)$ a partir de los campos de Killing de la 3-variedad.

Caracterización de las Formas de Espacio

Las formas de espacio se pueden caracterizar como las únicas 3-variedades de Riemann M que verifican

- Son simplemente conexas.
- Son espacios homogéneos (para todo par de puntos en M, existe una isometría que lleva uno en el otro).
- La dimensión del grupo de isometrías $Iso(M)$ es la máxima posible, 6.

Podemos entender el grupo de isometrías $Iso(M)$ a partir de los campos de Killing de la 3-variedad.

Campos de Killing

Los campos de Killing son los generadores infinitesimales de las isometrías.

Reducción de los Campos de Killing

Sea ξ un campo de Killing en una forma de espacio $M^3(\rho)$.

Reducción de los Campos de Killing

Sea ξ un campo de Killing en una forma de espacio $M^3(\rho)$.
Podemos suponer que ξ se descompone como

Reducción de los Campos de Killing

Sea ξ un campo de Killing en una forma de espacio $M^3(\rho)$. Podemos suponer que ξ se descompone como

- En $\mathbb{R}^3$ ($\rho = 0$), $\qquad \xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 V_2\,,$
  donde $X_1 = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}$ (rotación esférica) y $V_2 = \partial_{x_3}$ (traslación).

Reducción de los Campos de Killing

Sea ξ un campo de Killing en una forma de espacio $M^3(\rho)$. Podemos suponer que ξ se descompone como

- En $\mathbb{R}^3$ $(\rho = 0)$, $\qquad \xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 V_2\,,$
  donde $X_1 = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}$ (rotación esférica) y $V_2 = \partial_{x_3}$ (traslación).

- En $\mathbb{S}^3(\rho)$ $(\rho > 0)$, $\qquad \xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\,,$
  donde $X_2 = -x_4\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_4}$ (rotación esférica).

Reducción de los Campos de Killing

Sea ξ un campo de Killing en una forma de espacio $M^3(\rho)$. Podemos suponer que ξ se descompone como

- En $\mathbb{R}^3$ ($\rho = 0$), $\qquad \xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 V_2\,,$
  donde $X_1 = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}$ (rotación esférica) y $V_2 = \partial_{x_3}$ (traslación).
- En $\mathbb{S}^3(\rho)$ ($\rho > 0$), $\qquad \xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\,,$
  donde $X_2 = -x_4\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_4}$ (rotación esférica).
- En $\mathbb{H}^3(\rho)$ ($\rho < 0$), (Do Carmo-Dajczer)
  $$\xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_3 X_3\,,$$
  donde $X_3 = x_4\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_4}$ (rotación hiperbólica),

Reducción de los Campos de Killing

Sea ξ un campo de Killing en una forma de espacio $M^3(\rho)$.
Podemos suponer que ξ se descompone como

- En $\mathbb{R}^3$ ($\rho = 0$), $\qquad \xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 V_2\,,$
  donde $X_1 = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}$ (rotación esférica) y $V_2 = \partial_{x_3}$ (traslación).

- En $\mathbb{S}^3(\rho)$ ($\rho > 0$), $\qquad \xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2\,,$
  donde $X_2 = -x_4\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_4}$ (rotación esférica).

- En $\mathbb{H}^3(\rho)$ ($\rho < 0$), (Do Carmo-Dajczer)
  $$\xi = \lambda_1 X_1 + \lambda_3 X_3\,,$$
  donde $X_3 = x_4\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_4}$ (rotación hiperbólica),
  ó
  $$\xi = \lambda_4 X_4\,,$$
  con $X_4 = (x_4 - x_3)\partial_{x_2} + x_2(\partial_{x_3} + \partial_{x_4})$ (rotación parabólica).

Superficies de Revolución

Superficies de Revolución

Consideremos el grupo uniparamétrico de isometrías determinado por el flujo ξ, $\{\phi_t \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Superficies de Revolución

Consideremos el grupo uniparamétrico de isometrías determinado por el flujo ξ, $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Superficie ξ-invariante

Una superficie S será ξ-invariante si $\phi_t(S) = S$.

Superficies de Revolución

Consideremos el grupo uniparamétrico de isometrías determinado por el flujo ξ, $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Superficie ξ-invariante

Una superficie S será ξ-invariante si $\phi_t(S) = S$.

Superficie de Revolución

Si el campo de Killing ξ es rotacional (es decir, $\xi = \lambda_i X_i$)

Superficies de Revolución

Consideremos el grupo uniparamétrico de isometrías determinado por el flujo ξ, $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Superficie ξ-invariante

Una superficie S será ξ-invariante si $\phi_t(S) = S$.

Superficie de Revolución

Si el campo de Killing ξ es rotacional (es decir, $\xi = \lambda_i X_i$), S es una superficie de revolución.

Superficies de Revolución

Consideremos el grupo uniparamétrico de isometrías determinado por el flujo ξ, $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Superficie ξ-invariante

Una superficie S será ξ-invariante si $\phi_t(S) = S$.

Superficie de Revolución

Si el campo de Killing ξ es rotacional (es decir, $\xi = \lambda_i X_i$), S es una superficie de revolución.

En este caso, tenemos la parametrización natural

$$x(s,t) = \phi_t(\gamma(s)),$$

Superficies de Revolución

Consideremos el grupo uniparamétrico de isometrías determinado por el flujo ξ, $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Superficie ξ-invariante

Una superficie S será ξ-invariante si $\phi_t(S) = S$.

Superficie de Revolución

Si el campo de Killing ξ es rotacional (es decir, $\xi = \lambda_i X_i$), S es una superficie de revolución.

En este caso, tenemos la parametrización natural

$$x(s, t) = \phi_t(\gamma(s)) \,,$$

donde $\gamma(s)$ es la curva perfil.

Superficies de Revolución

Consideremos el grupo uniparamétrico de isometrías determinado por el flujo ξ, $\{\phi_t \,|\, t \in \mathbb{R}\}$.

Superficie ξ-invariante

Una superficie S será ξ-invariante si $\phi_t(S) = S$.

Superficie de Revolución

Si el campo de Killing ξ es rotacional (es decir, $\xi = \lambda_i X_i$), S es una superficie de revolución.

En este caso, tenemos la parametrización natural

$$x(s,t) = \phi_t(\gamma(s)) \,,$$

donde $\gamma(s)$ es la curva perfil.

- Curva plana ($\tau = 0$) inmersa en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2(\rho)$ ó $\mathbb{H}^2(\rho)$.

Curvas de Frenet

Sea $\gamma(s)$ una curva inmersa en $M^3(\rho)$ de velocidad unitaria $T(s)$.

Curvas de Frenet

Sea $\gamma(s)$ una curva inmersa en $M^3(\rho)$ de velocidad unitaria $T(s)$.

- Si $\frac{DT}{ds}(s)$ es cero, $\gamma(s)$ es una geodésica de $M^3(\rho)$.

Curvas de Frenet

Sea $\gamma(s)$ una curva inmersa en $M^3(\rho)$ de velocidad unitaria $T(s)$.

- Si $\frac{DT}{ds}(s)$ es cero, $\gamma(s)$ es una geodésica de $M^3(\rho)$.
- Si no, tenemos definida la referencia de Frenet $\{T, N, B\}(s)$.

Curvas de Frenet

Sea $\gamma(s)$ una curva inmersa en $M^3(\rho)$ de velocidad unitaria $T(s)$.

- Si $\frac{DT}{ds}(s)$ es cero, $\gamma(s)$ es una geodésica de $M^3(\rho)$.
- Si no, tenemos definida la referencia de Frenet $\{T, N, B\}(s)$.

Ecuaciones de Frenet

$$\begin{aligned} \frac{DT}{ds}(s) &= \kappa(s)\, N(s) \\ \frac{DN}{ds}(s) &= -\kappa(s)\, T(s) + \tau(s)\, B(s) \\ \frac{DB}{ds}(s) &= -\tau(s)\, N(s) \end{aligned}$$

Curvas de Frenet

Sea $\gamma(s)$ una curva inmersa en $M^3(\rho)$ de velocidad unitaria $T(s)$.

- Si $\frac{DT}{ds}(s)$ es cero, $\gamma(s)$ es una geodésica de $M^3(\rho)$.
- Si no, tenemos definida la referencia de Frenet $\{T, N, B\}(s)$.

Ecuaciones de Frenet

$$
\begin{aligned}
\frac{DT}{ds}(s) &= \kappa(s)\,N(s)\\
\frac{DN}{ds}(s) &= -\kappa(s)\,T(s) + \tau(s)\,B(s)\\
\frac{DB}{ds}(s) &= -\tau(s)\,N(s)
\end{aligned}
$$

Teorema Fundamental de Curvas de Frenet

La curvatura, $\kappa(s)$, y la torsión, $\tau(s)$, determinan completamente la curva $\gamma(s)$, salvo isometrías.

Superficies de Revolución con CMC

1. Formas Fundamentales

1. Formas Fundamentales
2. Ecuaciones Fundamentales

1. Formas Fundamentales
2. Ecuaciones Fundamentales
3. Extensión del Funcional de Blaschke

Formas Fundamentales

Con respecto a la parametrización natural, la métrica inducida

Formas Fundamentales

Con respecto a la parametrización natural, la métrica inducida se puede ver como una métrica warped product dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

Formas Fundamentales

Con respecto a la parametrización natural, la métrica inducida se puede ver como una métrica warped product dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

Geodésicas de la Superficie

Para cada t_o fijo, las curvas $x(s, t_o) := \gamma_{t_o}(s)$ son geodésicas de la superficie S

Formas Fundamentales

Con respecto a la parametrización natural, la métrica inducida se puede ver como una métrica warped product dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

Geodésicas de la Superficie

Para cada t_o fijo, las curvas $x(s, t_o) := \gamma_{t_o}(s)$ son geodésicas de la superficie S, y por tanto, S admite una foliación geodésica.

Formas Fundamentales

Con respecto a la parametrización natural, la métrica inducida se puede ver como una métrica warped product dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

Geodésicas de la Superficie

Para cada t_o fijo, las curvas $x(s, t_o) := \gamma_{t_o}(s)$ son geodésicas de la superficie S, y por tanto, S admite una foliación geodésica.

- Si $\gamma_{t_o}(s)$ son también geodésicas de $M^3(\rho)$, S sería una superficie reglada.

Formas Fundamentales

Con respecto a la parametrización natural, la métrica inducida se puede ver como una métrica warped product dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2 .$$

Geodésicas de la Superficie

Para cada t_o fijo, las curvas $x(s, t_o) := \gamma_{t_o}(s)$ son geodésicas de la superficie S, y por tanto, S admite una foliación geodésica.

- Si $\gamma_{t_o}(s)$ son también geodésicas de $M^3(\rho)$, S sería una superficie reglada.
- En caso contrario, la segunda forma fundamental viene dada por

$$h = -\kappa(s) ds^2 + \frac{G(s)}{\kappa(s)} \left(G_{ss}(s) + \rho G(s) \right) dt^2 ,$$

donde $\kappa(s)$ es la curvatura de $\gamma(s)$ en $M^3(\rho)$.

Ecuaciones Fundamentales

Ecuaciones Fundamentales

- Dada una superficie de revolución S, las formas, g y h, verifican unas ecuaciones de compatibilidad.

Ecuaciones Fundamentales

- Dada una superficie de revolución S, las formas, g y h, verifican unas ecuaciones de compatibilidad.
- El recíproco también es cierto (Teorema Fundamental de Subvariedades).

Ecuaciones Fundamentales

- Dada una superficie de revolución S, las formas, g y h, verifican unas ecuaciones de compatibilidad.
- El recíproco también es cierto (Teorema Fundamental de Subvariedades).

Ecuaciones de Gauss-Codazzi

Ecuaciones Fundamentales

- Dada una superficie de revolución S, las formas, g y h, verifican unas ecuaciones de compatibilidad.
- El recíproco también es cierto (Teorema Fundamental de Subvariedades).

Ecuaciones de Gauss-Codazzi

$$0 = \left(\frac{1}{\kappa}\left(G_{ss} + G(\kappa^2 + \rho)\right)\right)_s - \kappa_s G\,.$$

Ecuaciones Fundamentales

- Dada una superficie de revolución S, las formas, g y h, verifican unas ecuaciones de compatibilidad.
- El recíproco también es cierto (Teorema Fundamental de Subvariedades).

Ecuaciones de Gauss-Codazzi

$$0 = \left(\frac{1}{\kappa}\left(G_{ss} + G(\kappa^2 + \rho)\right)\right)_s - \kappa_s G \,.$$

Por otro lado, S tendrá curvatura media constante (CMC), si existe $H \in \mathbb{R}$, tal que

$$H = \frac{1}{2\kappa G}\left(G_{ss} - G\left(\kappa^2 - \rho\right)\right) \,.$$

Extensión del Funcional de Blaschke (1)

Combinando las ecuaciones de Gauss-Codazzi y la de CMC, llegamos a que

Extensión del Funcional de Blaschke (1)

Combinando las ecuaciones de Gauss-Codazzi y la de CMC, llegamos a que

- $G(s)$ es solución de

$$(K =) -\frac{G_{ss}}{G} = H^2 + \rho,$$

con $\kappa = -H$ y donde K es la curvatura de Gauss.

Extensión del Funcional de Blaschke (1)

Combinando las ecuaciones de Gauss-Codazzi y la de CMC, llegamos a que

- $G(s)$ es solución de

$$(K =) - \frac{G_{ss}}{G} = H^2 + \rho,$$

  con $\kappa = -H$ y donde K es la curvatura de Gauss.
- O, por el contrario,

$$G(s) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}},$$

Extensión del Funcional de Blaschke (1)

Combinando las ecuaciones de Gauss-Codazzi y la de CMC, llegamos a que

- $G(s)$ es solución de

$$(K =) - \frac{G_{ss}}{G} = H^2 + \rho,$$

  con $\kappa = -H$ y donde K es la curvatura de Gauss.

- O, por el contrario,

$$G(s) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}},$$

  es solución de la ecuación EMP (Garay-Pámpano)

$$G_{ss} + G(H^2 + \rho) = \frac{1}{16G^3}.$$

Extensión del Funcional de Blaschke (2)

En ambos casos, la curva perfil $\gamma(s)$ con curvatura $\kappa(s)$ es una curva crítica para el funcional

$$\mathbf{\Theta}(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

en $M^2(\rho)$.

Extensión del Funcional de Blaschke (2)

En ambos casos, la curva perfil $\gamma(s)$ con curvatura $\kappa(s)$ es una curva crítica para el funcional

$$\mathbf{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

en $M^2(\rho)$.

- El caso $\kappa = -H$ es un mínimo global entre las curvas inmersas en $M^2(\rho)$ con $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$.

Extensión del Funcional de Blaschke (2)

En ambos casos, la curva perfil $\gamma(s)$ con curvatura $\kappa(s)$ es una curva crítica para el funcional

$$\mathbf{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

en $M^2(\rho)$.

- El caso $\kappa = -H$ es un mínimo global entre las curvas inmersas en $M^2(\rho)$ con $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$.
- En el segundo caso, la curvatura de γ, $\kappa(s)$ es solución de la ecuación de Euler-Lagrange en el espacio de curvas inmersas en $M^2(\rho)$ verificando $\kappa > -H$, $\Omega_{p_o p_1}$.

Construcción

Construcción

1. Curvas Críticas

Construcción

1. Curvas Críticas
2. Caracterización en Función de Campos de Killing

Construcción

1. Curvas Críticas
2. Caracterización en Función de Campos de Killing
3. Evolución Binormal

Curvas Críticas

En $M^2(\rho)$, consideramos la extensión del funcional de Blaschke

$$\boldsymbol{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

para $H \in \mathbb{R}$ fijo.

Curvas Críticas

En $M^2(\rho)$, consideramos la extensión del funcional de Blaschke

$$\boldsymbol{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

para $H \in \mathbb{R}$ fijo.

- Para el espacio de curvas $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$, las curvas con curvatura $\kappa = -H$ son extremos.

Curvas Críticas

En $M^2(\rho)$, consideramos la extensión del funcional de Blaschke

$$\mathbf{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

para $H \in \mathbb{R}$ fijo.

- Para el espacio de curvas $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$, las curvas con curvatura $\kappa = -H$ son extremos.
- En el espacio $\Omega_{p_o p_1}$, aplicando la teoría clásica del cálculo de variaciones, obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange

Curvas Críticas

En $M^2(\rho)$, consideramos la extensión del funcional de Blaschke

$$\mathbf{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

para $H \in \mathbb{R}$ fijo.

- Para el espacio de curvas $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$, las curvas con curvatura $\kappa = -H$ son extremos.
- En el espacio $\Omega_{p_o p_1}$, aplicando la teoría clásica del cálculo de variaciones, obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa + H}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\kappa + H}}\left(\kappa^2 + \rho\right) - 2\kappa\sqrt{\kappa + H} = 0.$$

Curvas Críticas

En $M^2(\rho)$, consideramos la extensión del funcional de Blaschke

$$\boldsymbol{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa(s) + H}\, ds,$$

para $H \in \mathbb{R}$ fijo.

- Para el espacio de curvas $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$, las curvas con curvatura $\kappa = -H$ son extremos.
- En el espacio $\Omega_{p_o p_1}$, aplicando la teoría clásica del cálculo de variaciones, obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa + H}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\kappa + H}}\left(\kappa^2 + \rho\right) - 2\kappa\sqrt{\kappa + H} = 0.$$

Solución con Curvatura Constante

Si $\kappa(s) = \kappa_o$ es constante, tenemos

$$\kappa_o = -H + \sqrt{H^2 + \rho}\,.$$

Soluciones de Euler-Lagrange

Por otro lado, si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$ no es constante

Soluciones de Euler-Lagrange

Por otro lado, si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$ no es constante, definimos

$$a = -\rho - H^2\,, \quad b = 4d - 2H\,, \quad \Delta = -4a - b^2\,.$$

Soluciones de Euler-Lagrange

Por otro lado, si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$ no es constante, definimos

$$a = -\rho - H^2\,, \quad b = 4d - 2H\,, \quad \Delta = -4a - b^2\,.$$

Y tenemos,

Soluciones con Curvatura No Constante

1. Si $-\rho = H^2$, $\qquad \kappa_d(s) = \dfrac{b}{b^2 s^2 - c} - H\,.$

Soluciones de Euler-Lagrange

Por otro lado, si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$ no es constante, definimos

$$a = -\rho - H^2 \,, \quad b = 4d - 2H \,, \quad \Delta = -4a - b^2 \,.$$

Y tenemos,

Soluciones con Curvatura No Constante

1. Si $-\rho = H^2$, $\qquad \kappa_d(s) = \dfrac{b}{b^2 s^2 - c} - H \,.$

2. Si $-\rho < H^2$, (solución periódica)

$$\kappa_d(s) = \frac{2a}{-b + \sqrt{-\Delta}\sin\left(2\sqrt{-a}s\right)} - H \,.$$

Soluciones de Euler-Lagrange

Por otro lado, si $\kappa(s)=\kappa_d(s)$ no es constante, definimos

$$a=-\rho-H^2\,,\quad b=4d-2H\,,\quad \Delta=-4a-b^2\,.$$

Y tenemos,

Soluciones con Curvatura No Constante

1. Si $-\rho=H^2$, $\qquad \kappa_d(s)=\dfrac{b}{b^2s^2-c}-H\,.$
2. Si $-\rho<H^2$, (solución periódica)
$$\kappa_d(s)=\frac{2a}{-b+\sqrt{-\Delta}\sin\left(2\sqrt{-a}s\right)}-H\,.$$
3. Si $-\rho>H^2$,
$$\kappa_d(s)=\frac{2a}{-b+\sqrt{-\Delta}\cosh\left(2\sqrt{a}s\right)}-H\,.$$

Campo de Killing Asociado

Campo de Killing Asociado

Definimos el campo de vectores $\mathcal{I}$ sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}}B.$$

Campo de Killing Asociado

Definimos el campo de vectores $\mathcal{I}$ sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}} B.$$

Campo de Killing sobre γ (Langer-Singer)

Llamamos campo de Killing sobre γ a un campo de vectores sobre γ, W, que verifique $W(v)(s) = W(\kappa)(s) = 0$.

Campo de Killing Asociado

Definimos el campo de vectores $\mathcal{I}$ sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s)+H}}B.$$

Campo de Killing sobre γ (Langer-Singer)

Llamamos campo de Killing sobre γ a un campo de vectores sobre γ, W, que verifique $W(v)(s) = W(\kappa)(s) = 0$.

Proposición

El campo $\mathcal{I}$ es un campo de vectores de Killing sobre γ.

Campo de Killing Asociado

Definimos el campo de vectores $\mathcal{I}$ sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}}B.$$

Campo de Killing sobre γ (Langer-Singer)

Llamamos campo de Killing sobre γ a un campo de vectores sobre γ, W, que verifique $W(v)(s) = W(\kappa)(s) = 0$.

Proposición

El campo $\mathcal{I}$ es un campo de vectores de Killing sobre γ.

Además, este campo de Killing sobre γ, $\mathcal{I}$, se puede extender a un campo de vectores de Killing en todo $M^3(\rho)$, ξ.

Evolución Binormal

- Sea γ una curva crítica (plana) de la extensión del funcional de Blaschke en $M^2(\rho)$.

Evolución Binormal

- Sea γ una curva crítica (plana) de la extensión del funcional de Blaschke en $M^2(\rho)$.
- Consideramos el campo de vectores de Killing ξ que extiende a $\mathcal{I} = G(s)B$.

Evolución Binormal

- Sea γ una curva crítica (plana) de la extensión del funcional de Blaschke en $M^2(\rho)$.
- Consideramos el campo de vectores de Killing ξ que extiende a $\mathcal{I} = G(s)B$.
- La evolución de γ bajo el flujo del campo de Killing ξ genera una superficie de evolución binormal ξ-invariante S_γ de $M^3(\rho)$.

Evolución Binormal

- Sea γ una curva crítica (plana) de la extensión del funcional de Blaschke en $M^2(\rho)$.
- Consideramos el campo de vectores de Killing ξ que extiende a $\mathcal{I} = G(s)B$.
- La evolución de γ bajo el flujo del campo de Killing ξ genera una superficie de evolución binormal ξ-invariante S_γ de $M^3(\rho)$.

Proposición

La superficie S_γ es una superficie de revolución.

Evolución Binormal

- Sea γ una curva crítica (plana) de la extensión del funcional de Blaschke en $M^2(\rho)$.
- Consideramos el campo de vectores de Killing ξ que extiende a $\mathcal{I} = G(s)B$.
- La evolución de γ bajo el flujo del campo de Killing ξ genera una superficie de evolución binormal ξ-invariante S_γ de $M^3(\rho)$.

Proposición

La superficie S_γ es una superficie de revolución.

Teorema

La superficie de revolución S_γ tiene curvatura media constante, H.

Estudio de la Compacidad

Estudio de la Compacidad

1. Órbitas de las Rotaciones

Estudio de la Compacidad

1. Órbitas de las Rotaciones
2. Condiciones de Cierre

1. Órbitas de las Rotaciones
2. Condiciones de Cierre
3. Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

1. Órbitas de las Rotaciones
2. Condiciones de Cierre
3. Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$
4. Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$

Estudio de la Compacidad

1. Órbitas de las Rotaciones
2. Condiciones de Cierre
3. Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$
4. Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$
5. Esfera $\mathbb{S}^3(\rho)$

Órbitas de las Rotaciones

Órbitas de las Rotaciones

Sea δ la curva integral del flujo ξ

Órbitas de las Rotaciones

Sea δ la curva integral del flujo ξ. Se tiene que

$$\kappa_\delta^2(s,t) = 4d(\kappa_d(s) + H) - \rho\,.$$

Sea δ la curva integral del flujo ξ. Se tiene que

$$\kappa_\delta^2(s,t) = 4d(\kappa_d(s) + H) - \rho\,.$$

Esto impone condiciones sobre la constante de integración, d.

Órbitas de las Rotaciones

Sea δ la curva integral del flujo ξ. Se tiene que

$$\kappa_\delta^2(s,t) = 4d(\kappa_d(s) + H) - \rho\,.$$

Esto impone condiciones sobre la constante de integración, d.

- En $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3(\rho)$, solo hay rotaciones esféricas (sus órbitas, δ_s, son círculos). En este caso, $d > 0$.

Órbitas de las Rotaciones

Sea δ la curva integral del flujo ξ. Se tiene que

$$\kappa_\delta^2(s,t) = 4d(\kappa_d(s) + H) - \rho\,.$$

Esto impone condiciones sobre la constante de integración, d.

- En $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3(\rho)$, solo hay rotaciones esféricas (sus órbitas, δ_s, son círculos). En este caso, $d > 0$.
- En $\mathbb{H}^3(\rho)$, hay tres tipos:

Órbitas de las Rotaciones

Sea δ la curva integral del flujo ξ. Se tiene que

$$\kappa_\delta^2(s,t) = 4d(\kappa_d(s) + H) - \rho\,.$$

Esto impone condiciones sobre la constante de integración, d.

- En $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3(\rho)$, solo hay rotaciones esféricas (sus órbitas, δ_s, son círculos). En este caso, $d > 0$.
- En $\mathbb{H}^3(\rho)$, hay tres tipos:
  1. Rotaciones Esféricas (δ círculo).
  $$\kappa_\delta^2 > -\rho \Longleftrightarrow d > 0\,.$$
  2. Rotaciones Hiperbólicas (δ hipercíclo).
  $$\kappa_\delta^2 < -\rho \Longleftrightarrow d < 0\,.$$
  3. Rotaciones Parabólicas (δ horocíclo).
  $$\kappa_\delta^2 = -\rho \Longleftrightarrow d = 0\,.$$

Órbitas de las Rotaciones

Sea δ la curva integral del flujo ξ. Se tiene que

$$\kappa_\delta^2(s,t) = 4d(\kappa_d(s) + H) - \rho\,.$$

Esto impone condiciones sobre la constante de integración, d.

- En $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3(\rho)$, solo hay rotaciones esféricas (sus órbitas, δ_s, son círculos). En este caso, $d > 0$.
- En $\mathbb{H}^3(\rho)$, hay tres tipos:
  1. Rotaciones Esféricas (δ círculo).
  $$\kappa_\delta^2 > -\rho \iff d > 0\,.$$
  2. Rotaciones Hiperbólicas (δ hipercíclo).
  $$\kappa_\delta^2 < -\rho \iff d < 0\,.$$
  3. Rotaciones Parabólicas (δ horocíclo).
  $$\kappa_\delta^2 = -\rho \iff d = 0\,.$$

Rotaciones Esféricas

Solo tienen interés las rotaciones esféricas ($d > 0$), pues son las únicas con órbitas cerradas.

Condiciones de Cierre

Condiciones de Cierre

- Si $\kappa(s) = \kappa_o$, la curvatura es periódica.

Condiciones de Cierre

- Si $\kappa(s) = \kappa_o$, la curvatura es periódica.
- Si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$, solo la del caso 2. $(-\rho < H^2)$ es periódica

$$\kappa_d(s) = \frac{\rho + H^2}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4Hd - \rho}\,\sin\left(2\sqrt{H^2+\rho}\,s\right)} - H\,,$$

de periodo $\frac{\pi}{\sqrt{H^2+\rho}}$. (En este caso, $d > max\{0, \frac{H+\sqrt{H^2+\rho}}{2}\}$).

Condiciones de Cierre

- Si $\kappa(s) = \kappa_o$, la curvatura es periódica.
- Si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$, solo la del caso 2. $(-\rho < H^2)$ es periódica

$$\kappa_d(s) = \frac{\rho + H^2}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4Hd - \rho}\,\sin\left(2\sqrt{H^2+\rho}\,s\right)} - H\,,$$

de periodo $\frac{\pi}{\sqrt{H^2+\rho}}$. (En este caso, $d > max\{0, \frac{H+\sqrt{H^2+\rho}}{2}\}$).

Teorema

Una curva crítica de $\mathbf{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa + H}\,ds$ en $M^2(\rho)$ con curvatura no constante (periódica), $\kappa_d(s)$, será cerrada si y solo si

Condiciones de Cierre

- Si $\kappa(s) = \kappa_o$, la curvatura es periódica.
- Si $\kappa(s) = \kappa_d(s)$, solo la del caso 2. $(-\rho < H^2)$ es periódica

$$\kappa_d(s) = \frac{\rho + H^2}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4Hd - \rho}\,\sin\left(2\sqrt{H^2+\rho}\,s\right)} - H\,,$$

de periodo $\frac{\pi}{\sqrt{H^2+\rho}}$. (En este caso, $d > max\{0, \frac{H+\sqrt{H^2+\rho}}{2}\}$).

Teorema

Una curva crítica de $\mathbf{\Theta}(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{\kappa + H}\, ds$ en $M^2(\rho)$ con curvatura no constante (periódica), $\kappa_d(s)$, será cerrada si y solo si

$$\Lambda(d) = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H^2+\rho}}} \frac{(\kappa_d(u) + 2H)\sqrt{\kappa_d(u) + H}}{4d\,(\kappa_d(u) + H) - \rho} du$$

es 0, si $\rho \leq 0$; ó $\Lambda(d) = \frac{n\,\pi}{m\sqrt{d\rho}}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, si $\rho > 0$.

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Curvas de Delaunay

Las curvas críticas del funcional de Blaschke en $\mathbb{R}^2$, son precisamente las roulettes de focos de cónicas.

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Curvas de Delaunay

Las curvas críticas del funcional de Blaschke en $\mathbb{R}^2$, son precisamente las roulettes de focos de cónicas.

En 1841, Delaunay clasificó las superficies de revolución con CMC (Superficies de Delaunay):

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Curvas de Delaunay

Las curvas críticas del funcional de Blaschke en $\mathbb{R}^2$, son precisamente las roulettes de focos de cónicas.

En 1841, Delaunay clasificó las superficies de revolución con CMC (Superficies de Delaunay):

- Plano (totalmente geodésica), $\mathbb{R}^2$.

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Curvas de Delaunay

Las curvas críticas del funcional de Blaschke en $\mathbb{R}^2$, son precisamente las roulettes de focos de cónicas.

En 1841, Delaunay clasificó las superficies de revolución con CMC (Superficies de Delaunay):

- Plano (totalmente geodésica), $\mathbb{R}^2$.
- Esfera (totalmente umbilical), $\mathbb{S}^2(r)$, con $r > 0$.

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Curvas de Delaunay

Las curvas críticas del funcional de Blaschke en $\mathbb{R}^2$, son precisamente las roulettes de focos de cónicas.

En 1841, Delaunay clasificó las superficies de revolución con CMC (Superficies de Delaunay):

- Plano (totalmente geodésica), $\mathbb{R}^2$.
- Esfera (totalmente umbilical), $\mathbb{S}^2(r)$, con $r > 0$.
- Cilíndro (isoparamétrica llana), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Curvas de Delaunay

Las curvas críticas del funcional de Blaschke en $\mathbb{R}^2$, son precisamente las roulettes de focos de cónicas.

En 1841, Delaunay clasificó las superficies de revolución con CMC (Superficies de Delaunay):

- Plano (totalmente geodésica), $\mathbb{R}^2$.
- Esfera (totalmente umbilical), $\mathbb{S}^2(r)$, con $r > 0$.
- Cilíndro (isoparamétrica llana), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
- Catenoide (no isoparamétrica con $H = 0$).
- Nodoide (no isoparamétrica con $H \neq 0$).
- Onduloide (no isoparamétrica con $H \neq 0$).

Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$

Curvas de Delaunay

Las curvas críticas del funcional de Blaschke en $\mathbb{R}^2$, son precisamente las roulettes de focos de cónicas.

En 1841, Delaunay clasificó las superficies de revolución con CMC (Superficies de Delaunay):

- Plano (totalmente geodésica), $\mathbb{R}^2$.
- Esfera (totalmente umbilical), $\mathbb{S}^2(r)$, con $r > 0$.
- Cilíndro (isoparamétrica llana), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
- Catenoide (no isoparamétrica con $H = 0$).
- Nodoide (no isoparamétrica con $H \neq 0$).
- Onduloide (no isoparamétrica con $H \neq 0$).

Esfera

Las únicas superficies de revolución compactas con CMC son las esferas totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(r)$.

Superficies de Revolución con CMC en $\mathbb{H}^3(\rho)$:

Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$

Superficies de Revolución con CMC en $\mathbb{H}^3(\rho)$:

- Isoparamétricas,

ESPACIO HIPERBÓLICO $\mathbb{H}^3(\rho)$

Superficies de Revolución con CMC en $\mathbb{H}^3(\rho)$:

- Isoparamétricas,
  1. Totalmente geodésicas, $\mathbb{H}^2(\rho)$ cuando $H = 0$.

Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$

Superficies de Revolución con CMC en $\mathbb{H}^3(\rho)$:

- Isoparamétricas,
  1. Totalmente geodésicas, $\mathbb{H}^2(\rho)$ cuando $H = 0$.
  2. Esferas totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(H^2 + \rho)$, cuando $H^2 > -\rho$.
  3. Superficies equidistantes, cuando $0 \neq H^2 < -\rho$.
  4. Horoesferas (llanas), cuando $H^2 = -\rho$.

Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$

Superficies de Revolución con CMC en $\mathbb{H}^3(\rho)$:

- Isoparamétricas,
  1. Totalmente geodésicas, $\mathbb{H}^2(\rho)$ cuando $H = 0$.
  2. Esferas totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(H^2 + \rho)$, cuando $H^2 > -\rho$.
  3. Superficies equidistantes, cuando $0 \neq H^2 < -\rho$.
  4. Horoesferas (llanas), cuando $H^2 = -\rho$.
  5. Cilindros (isoparamétricas llanas), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}^1$.

Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$

Superficies de Revolución con CMC en $\mathbb{H}^3(\rho)$:

- Isoparamétricas,
    1. Totalmente geodésicas, $\mathbb{H}^2(\rho)$ cuando $H = 0$.
    2. Esferas totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(H^2 + \rho)$, cuando $H^2 > -\rho$.
    3. Superficies equidistantes, cuando $0 \neq H^2 < -\rho$.
    4. Horoesferas (llanas), cuando $H^2 = -\rho$.
    5. Cilindros (isoparamétricas llanas), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}^1$.

No Isoparamétricas

No existen curvas críticas cerradas con curvatura no constante cuya evolución binormal sea de tipo esférico ($d > 0$).

Espacio Hiperbólico $\mathbb{H}^3(\rho)$

Superficies de Revolución con CMC en $\mathbb{H}^3(\rho)$:

- Isoparamétricas,
  1. Totalmente geodésicas, $\mathbb{H}^2(\rho)$ cuando $H = 0$.
  2. Esferas totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(H^2 + \rho)$, cuando $H^2 > -\rho$.
  3. Superficies equidistantes, cuando $0 \neq H^2 < -\rho$.
  4. Horoesferas (llanas), cuando $H^2 = -\rho$.
  5. Cilindros (isoparamétricas llanas), $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{H}^1$.

No Isoparamétricas

No existen curvas críticas cerradas con curvatura no constante cuya evolución binormal sea de tipo esférico ($d > 0$).

Esfera

Las únicas superficies de revolución compactas con CMC son las esferas totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(H^2 + \rho)$, con $H^2 + \rho > 0$.

Esfera $\mathbb{S}^3(\rho)$

ESFERA $\mathbb{S}^3(\rho)$

TEOREMA

Existen curvas críticas cerradas con curvatura no constante inmersas en $\mathbb{S}^2(\rho)$.

Esfera $\mathbb{S}^3(\rho)$

Teorema

Existen curvas críticas cerradas con curvatura no constante inmersas en $\mathbb{S}^2(\rho)$.

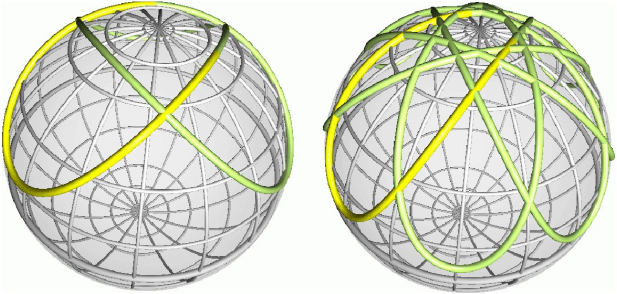

Figura: Curvas Críticas Cerradas para $H = 0$ (Arroyo).

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC en $\mathbb{S}^3(\rho)$:

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC en $\mathbb{S}^3(\rho)$:

- Generadas a partir de mínimos globales de $\mathbf{\Theta}$, γ con $\kappa = -H$,

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC en $\mathbb{S}^3(\rho)$:

- Generadas a partir de mínimos globales de $\mathbf{\Theta}$, γ con $\kappa = -H$,

  1. El ecuador $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie totalmente geodésica) cuando $H = 0$.

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC en $\mathbb{S}^3(\rho)$:

- Generadas a partir de mínimos globales de $\mathbf{\Theta}$, γ con $\kappa = -H$,

  1. El ecuador $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie totalmente geodésica) cuando $H = 0$.
  2. Superficies totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(r)$ con $r > \rho$, cuando $H \neq 0$.

CLASIFICACIÓN EN $\mathbb{S}^3(\rho)$ (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC en $\mathbb{S}^3(\rho)$:

- Generadas a partir de mínimos globales de $\mathbf{\Theta}$, γ con $\kappa = -H$,

    1. El ecuador $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie totalmente geodésica) cuando $H = 0$.
    2. Superficies totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(r)$ con $r > \rho$, cuando $H \neq 0$.

- Generadas a partir de soluciones de Euler-Lagrange,

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC en $\mathbb{S}^3(\rho)$:

- Generadas a partir de mínimos globales de $\mathbf{\Theta}$, γ con $\kappa = -H$,
  1. El ecuador $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie totalmente geodésica) cuando $H = 0$.
  2. Superficies totalmente umbilicales, $\mathbb{S}^2(r)$ con $r > \rho$, cuando $H \neq 0$.

- Generadas a partir de soluciones de Euler-Lagrange,
  3. Superficies de evolución binormal isoparamétricas llanas (Toros de Hopf)

$$\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\rho+\kappa^2}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\kappa}\sqrt{\rho+\kappa^2}\right),$$

con $\kappa = -H + \sqrt{H^2+\rho}$ curvatura de la curva perfil, γ.

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (2)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de soluciones de Euler-Lagrange,

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (2)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de soluciones de Euler-Lagrange,

  4. Superficies de evolución binormal no isoparamétricas generadas por una curva perfil, γ, con curvatura

  $$\kappa_d(s) = \frac{\rho + H^2}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4Hd - \rho}\,\sin\left(2\sqrt{H^2+\rho}\, s\right)} - H\,,$$

  para $d > \frac{H+\sqrt{H^2+\rho}}{2}$ y verificando la condición de cierre.

Clasificación en $\mathbb{S}^3(\rho)$ (2)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de soluciones de Euler-Lagrange,

  4. Superficies de evolución binormal no isoparamétricas generadas por una curva perfil, γ, con curvatura

  $$\kappa_d(s) = \frac{\rho + H^2}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4Hd - \rho}\,\sin\left(2\sqrt{H^2+\rho}\,s\right)} - H\,,$$

  para $d > \frac{H+\sqrt{H^2+\rho}}{2}$ y verificando la condición de cierre.

Observación

Estas últimas superficies no siempre están embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$. Es decir, la curva perfil no siempre es simple.

Superficies Embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$

TEOREMA

Existen curvas críticas cerradas y simples con curvatura no constante, $\kappa_d(s)$, si $H \neq 0, \pm\sqrt{\frac{\rho}{3}}$.

Superficies Embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$

Teorema

Existen curvas críticas cerradas y simples con curvatura no constante, $\kappa_d(s)$, si $H \neq 0, \pm\sqrt{\frac{\rho}{3}}$.

- Ripoll. Para $H \neq 0, \pm\sqrt{\frac{\rho}{3}}$, existen superficies de revolución compactas no isoparamétricas con CMC embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$.

Superficies Embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$

Teorema

Existen curvas críticas cerradas y simples con curvatura no constante, $\kappa_d(s)$, si $H \neq 0, \pm\sqrt{\frac{\rho}{3}}$.

- Ripoll. Para $H \neq 0, \pm\sqrt{\frac{\rho}{3}}$, existen superficies de revolución compactas no isoparamétricas con CMC embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$.

Corolario

Sea $m \geq 2$, para cualquier valor de $H \in \left(\sqrt{\rho}\cot\frac{\pi}{m}, \sqrt{\rho}\frac{m^2-2}{2\sqrt{m^2-1}}\right)$, existen curvas críticas cerradas y simples para la extensión del funcional de Blaschke con curvatura no constante, $\kappa_d(s)$.

Superficies Embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$

Teorema

Existen curvas críticas cerradas y simples con curvatura no constante, $\kappa_d(s)$, si $H \neq 0, \pm\sqrt{\frac{\rho}{3}}$.

- Ripoll. Para $H \neq 0, \pm\sqrt{\frac{\rho}{3}}$, existen superficies de revolución compactas no isoparamétricas con CMC embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$.

Corolario

Sea $m \geq 2$, para cualquier valor de $H \in \left(\sqrt{\rho}\cot\frac{\pi}{m}, \sqrt{\rho}\frac{m^2-2}{2\sqrt{m^2-1}}\right)$, existen curvas críticas cerradas y simples para la extensión del funcional de Blaschke con curvatura no constante, $\kappa_d(s)$.

- Perdomo. Si $H \in \left(\sqrt{\rho}\cot\frac{\pi}{m}, \sqrt{\rho}\frac{m^2-2}{2\sqrt{m^2-1}}\right)$, entonces existen superficies de revolución compactas embebidas en $\mathbb{S}^3(\rho)$ con curvaturas principales no constantes.

Conjetura de Lawson

Conjetura de Lawson

- Conjetura de Pinkall-Sterling (Andrews-Li). Todos los toros de CMC embebidos en $\mathbb{S}^3(\rho)$ son superficies de revolución.

Conjetura de Lawson

- Conjetura de Pinkall-Sterling (Andrews-Li). Todos los toros de CMC embebidos en $\mathbb{S}^3(\rho)$ son superficies de revolución.

Conjetura de Lawson (Brendle)

El único toro minimal embebido en $\mathbb{S}^3(\rho)$ es el toro de Clifford, $\mathbb{S}^1(\sqrt{2}\rho) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{2}\rho)$.

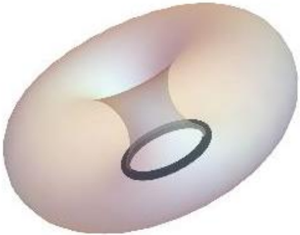

Figura: Proyección Estereográfica del Toro de Clifford.

Referencias

1. J. Arroyo, O. J. Garay y A. Pámpano, Binormal Motion of Curves with Constant Torsion, Adv. Math. Phys., vol. 2017 (2017).

2. J. Arroyo, O. J. Garay y A. Pámpano, Constant Mean Curvature Invariant Surfaces and Extremals of Curvature Energies, Preprint.

3. O. J. Garay y A. Pámpano, Binormal Evolution of Curves with Prescribed Velocity, WSEAS Trans. Fluid Mech., vol. 11 (2016), 112-120.

FIN

Agradecimientos: Esta investigación ha sido financiada por la ayuda del MINECO-FEDER, MTM2014-54804-P y por la del Gobierno Vasco, IT1094-16. El autor, también quiere agradecer al Programa Predoctoral de Formacion de Personal Investigador No Doctor del Gobierno Vasco (2015) su ayuda.