Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Geodésicas en Variedades de Riemann

Álvaro Pámpano Llarena

Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas

Dirigido por
Jose J. Mencía González
Óscar J. Garay Bengoechea

Bilbao, 15 de Mayo de 2014

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

Los ríos nacen en zonas geográficas altas y van descendiendo hasta desembocar en otros ríos más caudalosos, mares, lagos,... ¿Por donde descienden?

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

Los ríos nacen en zonas geográficas altas y van descendiendo hasta desembocar en otros ríos más caudalosos, mares, lagos,... ¿Por donde descienden?

Las hormigas salen de su hormiguero en busca de comida y al final se mueven en fila india desde su hormiguero hasta el alimento. ¿Por qué por ese camino?

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

Los ríos nacen en zonas geográficas altas y van descendiendo hasta desembocar en otros ríos más caudalosos, mares, lagos,... ¿Por donde descienden?

Las hormigas salen de su hormiguero en busca de comida y al final se mueven en fila india desde su hormiguero hasta el alimento. ¿Por qué por ese camino?

Un cartero a la hora de repartir la correspondencia sigue una trayectoria en el plano de la ciudad, siempre la misma trayectoria. ¿Cual es la razón?

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

Los ríos nacen en zonas geográficas altas y van descendiendo hasta desembocar en otros ríos más caudalosos, mares, lagos,... ¿Por donde descienden?

Las hormigas salen de su hormiguero en busca de comida y al final se mueven en fila india desde su hormiguero hasta el alimento. ¿Por qué por ese camino?

Un cartero a la hora de repartir la correspondencia sigue una trayectoria en el plano de la ciudad, siempre la misma trayectoria. ¿Cual es la razón?

Geodésicas

La naturaleza (y no sólo ella) tiende a desarrollar sus actividades minimizando ciertas "energías" (longitud, tiempo, esfuerzo,...). Aquí es donde aparecen las curvas geodésicas.

DEFINICIÓN FORMAL

DEFINICIÓN FORMAL

Definición de Curva Geodésica

Una curva parametrizada γ en una variedad diferenciable M es una geodésica con respecto a una conexión afín ∇,

DEFINICIÓN FORMAL

Definición de Curva Geodésica

Una curva parametrizada γ en una variedad diferenciable M es una geodésica con respecto a una conexión afín ∇, si verifica,

$$D_t\dot{\gamma} = 0.$$

EQUIVALENCIAS

EQUIVALENCIAS

- Una geodésica es una curva cuyo campo de vectores velocidad es paralelo a lo largo de la curva.

EQUIVALENCIAS

- Una geodésica es una curva cuyo campo de vectores velocidad es paralelo a lo largo de la curva.
- Dada una carta coordenada, una curva es una geodésica si y solo si sus funciones coordenadas satisfacen,

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

EQUIVALENCIAS

- Una geodésica es una curva cuyo campo de vectores velocidad es paralelo a lo largo de la curva.
- Dada una carta coordenada, una curva es una geodésica si y solo si sus funciones coordenadas satisfacen,

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

- Una curva diferenciable a trozos es una geodésica si y solo si, para toda variación propia, $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.

EQUIVALENCIAS

- Una geodésica es una curva cuyo campo de vectores velocidad es paralelo a lo largo de la curva.
- Dada una carta coordenada, una curva es una geodésica si y solo si sus funciones coordenadas satisfacen,

$$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0.$$

- Una curva diferenciable a trozos es una geodésica si y solo si, para toda variación propia, $\frac{dE}{ds}(0) = 0$.
- Una curva diferenciable a trozos de velocidad unitaria es una geodésica si y solo si es un punto crítico de la longitud.

CÁLCULO EN LOS MODELOS DE ESPACIO

1. Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$.
2. Espacio Elíptico (Esfera $\mathbb{S}^2$).
3. Espacio Hiperbólico (Semiplano de Poincaré $\mathbb{H}^2$).

CÁLCULO EN EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea $\bar{g}$, definida por,

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2.$$

CÁLCULO EN EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

Consideramos $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea $\bar{g}$, definida por,

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2.$$

Es fácil ver que los símbolos de Christoffel correspondientes son,

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k \in \{1, ..., n\}.$$

Por tanto, la ecuación local de las geodésicas es,

$$\ddot{x}^k(t) = 0, \forall k = 1, ..., n.$$

Finalmente, hallamos las curvas geodésicas, que son justamente las rectas parametrizadas con velocidad constante.

Finalmente, hallamos las curvas geodésicas, que son justamente las rectas parametrizadas con velocidad constante.

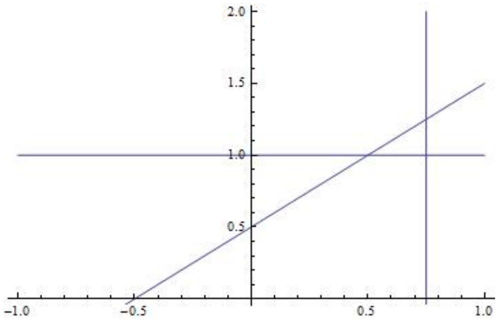
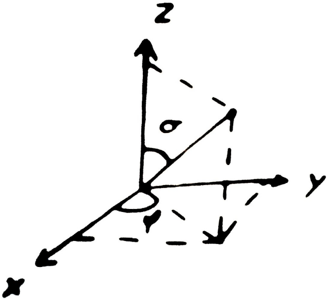


FIGURE: Ejemplos en el Plano.

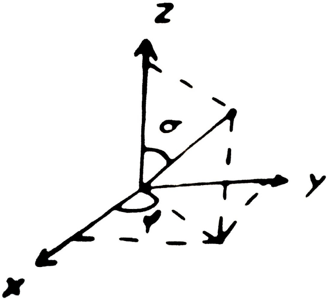
CÁLCULO EN LA ESFERA $\mathbb{S}^2$

Consideramos la parametrización $\mathbf{x}(\phi, \sigma)$ dada por las coordenadas esféricas ϕ (longitud) y σ (complementario de la latitud),



CÁLCULO EN LA ESFERA $\mathbb{S}^2$

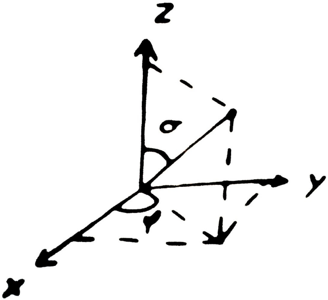
Consideramos la parametrización $\mathbf{x}(\phi, \sigma)$ dada por las coordenadas esféricas ϕ (longitud) y σ (complementario de la latitud),



y la métrica inducida, que viene determinada por, $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$.

CÁLCULO EN LA ESFERA $\mathbb{S}^2$

Consideramos la parametrización $\mathbf{x}(\phi, \sigma)$ dada por las coordenadas esféricas ϕ (longitud) y σ (complementario de la latitud),



y la métrica inducida, que viene determinada por, $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$. Es decir, tenemos la matriz,

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2 \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CÁLCULO EN LA ESFERA $\mathbb{S}^2$

Con esta parametrización conseguimos los siguientes símbolos de Christoffel,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{11}^2 = -\sin\sigma\cos\sigma \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}, & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0, & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

CÁLCULO EN LA ESFERA $\mathbb{S}^2$

Con esta parametrización conseguimos los siguientes símbolos de Christoffel,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{11}^2 = -\sin\sigma\cos\sigma \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\cos\sigma}{\sin\sigma}, & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0, & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

Y por tanto, la ecuación de las geodésicas es,

$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) + 2\dot{\phi}(t)\dot{\sigma}(t)\frac{\cos\sigma(t)}{\sin\sigma(t)} = 0 \\ \\ \ddot{\sigma}(t) - \sin\sigma(t)\cos\sigma(t)\dot{\phi}^2(t) = 0 \end{cases}$$

CÁLCULO EN LA ESFERA $\mathbb{S}^2$

Resolviendo el sistema anterior, concluimos que las geodésicas de la esfera son las circunferencias máximas parametrizadas por el arco. Esto es, la intersección de los planos que pasan por el origen con la propia esfera.

CÁLCULO EN LA ESFERA $\mathbb{S}^2$

Resolviendo el sistema anterior, concluimos que las geodésicas de la esfera son las circunferencias máximas parametrizadas por el arco. Esto es, la intersección de los planos que pasan por el origen con la propia esfera.

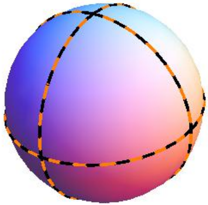


FIGURE: Ejemplos en la Esfera.

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Consideramos el semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$.

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Consideramos el semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$.Con la métrica,

$$g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy.$$

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Consideramos el semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$.Con la métrica,

$$g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy.$$

O de forma equivalente,

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Bajo estas condiciones, tenemos los siguientes símbolos de Christoffel,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{11}^2 = y^{-1} \\ \Gamma_{12}^1 = -y^{-1}, & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0, & \Gamma_{22}^2 = -y^{-1} \end{cases}$$

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Bajo estas condiciones, tenemos los siguientes símbolos de Christoffel,

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0, & \Gamma_{11}^2 = y^{-1} \\ \Gamma_{12}^1 = -y^{-1}, & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0, & \Gamma_{22}^2 = -y^{-1} \end{cases}$$

Y la ecuación local que deben de verificar las geodésicas,

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 2\frac{\dot{x}(t)\dot{y}^2(t)}{y(t)} = 0 \\ \\ \ddot{y}(t) + \frac{\dot{x}^2(t)}{y(t)} - \frac{\dot{y}^2(t)}{y(t)} = 0 \end{cases}$$

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos que las geodésicas del semiplano de Poincaré son,

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos que las geodésicas del semiplano de Poincaré son,

- las rectas verticales parametrizadas por,

$$\gamma(t) = (a, be^{ct}), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos que las geodésicas del semiplano de Poincaré son,

- las rectas verticales parametrizadas por,

$$\gamma(t) = (a, be^{ct}), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- y las semicircunferencias centradas en cada punto $(x, 0)$ convenientemente parametrizadas.

CÁLCULO EN EL SEMIPLANO $\mathbb{H}^2$

Resolviendo ese sistema de ecuaciones diferenciales, obtenemos que las geodésicas del semiplano de Poincaré son,

- las rectas verticales parametrizadas por,

$$\gamma(t) = (a, be^{ct}), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- y las semicircunferencias centradas en cada punto $(x, 0)$ convenientemente parametrizadas.

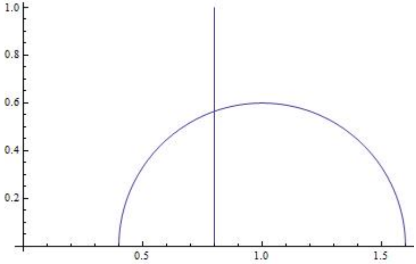


FIGURE: Ejemplos en Semiplano de Poincare.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Definición de Curva Minimizadora

Una curva regular a trozos γ en una variedad de Riemann, diremos que es minimizadora si

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Definición de Curva Minimizadora

Una curva regular a trozos γ en una variedad de Riemann, diremos que es minimizadora si

$$L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma}),$$

para cualquier otra curva $\tilde{\gamma}$ con los mismos extremos.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Definición de Curva Minimizadora

Una curva regular a trozos γ en una variedad de Riemann, diremos que es minimizadora si

$$L(\gamma) \leq L(\tilde{\gamma}),$$

para cualquier otra curva $\tilde{\gamma}$ con los mismos extremos.

Podemos relacionar esta definición con la energía,

Lema

Si tenemos una geodésica minimizadora γ, entonces, $E(\gamma) \leq E(\tilde{\gamma})$.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Algunos resultados importantes, son...

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Algunos resultados importantes, son...

Teorema

La geodésica radial es la única curva minimizadora, salvo reparametrizaciones.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Algunos resultados importantes, son...

Teorema

La geodésica radial es la única curva minimizadora, salvo reparametrizaciones.

Teorema

Las geodésicas respecto a la conexión de Levi-Civita son localmente minimizadoras.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Algunos resultados importantes, son...

Teorema

La geodésica radial es la única curva minimizadora, salvo reparametrizaciones.

Teorema

Las geodésicas respecto a la conexión de Levi-Civita son localmente minimizadoras.

Como consecuencia del teorema de Hopf-Rinow, tenemos,

Teorema

Una variedad de Riemann M es completa si y solo si cada par de puntos puede unirse mediante una geodésica minimizadora.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Consideramos $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ geodésica parametrizada por la longitud de arco.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Consideramos $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ geodésica parametrizada por la longitud de arco.

TEOREMA (MYERS)

Si se verifica que $Rc(\dot{\gamma}(t)) \geq \frac{n-1}{R^2}$ y $b - a > \pi R$, entonces γ no es un mínimo local de la energía.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Consideramos $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ geodésica parametrizada por la longitud de arco.

Teorema (Myers)

Si se verifica que $Rc(\dot{\gamma}(t)) \geq \frac{n-1}{R^2}$ y $b - a > \pi R$, entonces γ no es un mínimo local de la energía.

Consideremos $\mathbb{S}^2$ y la geodésica $\gamma : [\frac{-\pi}{2}, \pi] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Teorema (Bonnet-Myers)

Si M es conexa, completa y verifica $Rc(M) \geq \frac{n-1}{R^2}$, entonces M es compacta y su diámetro es menor o igual que πR.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Teorema (Bonnet-Myers)

Si M es conexa, completa y verifica $Rc(M) \geq \frac{n-1}{R^2}$, entonces M es compacta y su diámetro es menor o igual que πR.

La condición sobre la curvatura de Ricci es esencial, como demuestra el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Índice de Morse)

El índice de I_γ es finito e igual al número de puntos conjugados con $\gamma(a)$ contados con su multiplicidad.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Teorema (Índice de Morse)

El índice de I_γ es finito e igual al número de puntos conjugados con $\gamma(a)$ contados con su multiplicidad.

Corolario (Jacobi)

Si γ es una geodésica minimizadora, entonces γ no tiene puntos conjugados en (a, b).

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Un ejemplo clásico es, la geodésica $\gamma\colon[\frac{\pi}{2}, 2\pi] \longrightarrow C$ dada por, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ en el cilindro unidad. La curvatura de Gauss (o curvatura seccional) del cilindro es $K = 0$, luego no tiene puntos conjugados, es decir, es mínimo local de la energía.

PROPIEDADES MINIMIZADORAS DE LAS GEODÉSICAS

Un ejemplo clásico es, la geodésica $\gamma\colon[\frac{\pi}{2},2\pi]\longrightarrow C$ dada por, $\gamma(t)=(\cos t,\sin t,0)$ en el cilindro unidad. La curvatura de Gauss (o curvatura seccional) del cilindro es $K=0$, luego no tiene puntos conjugados, es decir, es mínimo local de la energía.

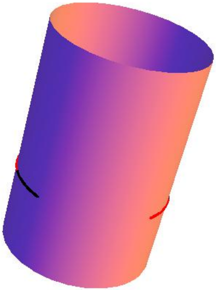
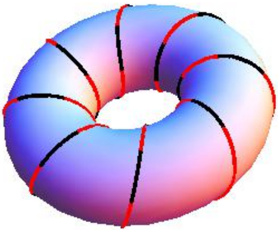


FIGURE: Cilindro.



FIN