



SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN COMPACTAS CON CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN $S^3(\rho)$

Álvaro Pámpano Llarena

VI Encuentro de Jóvenes Topólogos y Topólogas

Bilbao, 18-19 de Octubre de 2017

ÍNDICE

ÍNDICE

1. Superficies de Revolución con CMC

ÍNDICE

1. Superficies de Revolución con CMC
2. Construcción de las Superficies de Revolución con CMC

ÍNDICE

1. Superficies de Revolución con CMC
2. Construcción de las Superficies de Revolución con CMC
3. Estudio de la Compacidad

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN CON CMC

1. Parametrización

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN CON CMC

1. Parametrización
2. Formas Fundamentales
3. Ecuaciones Fundamentales

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN CON CMC

1. Parametrización
2. Formas Fundamentales
3. Ecuaciones Fundamentales
4. Funcional de Blaschke Generalizado

PARAMETRIZACIÓN

Consideramos la **3-esfera** $\mathbb{S}^3(\rho) \subset \mathbb{E}^4$ (espacio euclídeo de dimensión 4) definida por

$$\mathbb{S}^3(\rho) = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid \langle x, x \rangle = \frac{1}{\rho}\}.$$

PARAMETRIZACIÓN

Consideramos la **3-esfera** $\mathbb{S}^3(\rho) \subset \mathbb{E}^4$ (espacio euclídeo de dimensión 4) definida por

$$\mathbb{S}^3(\rho) = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid \langle x, x \rangle = \frac{1}{\rho}\}.$$

Sea $S \subset \mathbb{S}^3(\rho)$ una **superficie de revolución de CMC**.

PARAMETRIZACIÓN

Consideramos la **3-esfera** $\mathbb{S}^3(\rho) \subset \mathbb{E}^4$ (espacio euclídeo de dimensión 4) definida por

$$\mathbb{S}^3(\rho) = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid \langle x, x \rangle = \frac{1}{\rho}\}.$$

Sea $S \subset \mathbb{S}^3(\rho)$ una **superficie de revolución de CMC**. Es decir, S queda invariante por la acción de un grupo uniparamétrico de rotaciones, $\{\phi_t\}$.

PARAMETRIZACIÓN

Consideramos la **3-esfera** $\mathbb{S}^3(\rho) \subset \mathbb{E}^4$ (espacio euclídeo de dimensión 4) definida por

$$\mathbb{S}^3(\rho) = \{x \in \mathbb{E}^4 \mid \langle x, x \rangle = \frac{1}{\rho}\}.$$

Sea $S \subset \mathbb{S}^3(\rho)$ una **superficie de revolución de CMC**. Es decir, S queda invariante por la acción de un grupo uniparamétrico de rotaciones, $\{\phi_t\}$.

Y además, S admite la siguiente **parametrización natural**

$$x(s, t) = \phi_t(\gamma(s)),$$

donde $\gamma(s)$ se llama **curva perfil**.

Recordemos que la curva perfil de una superficie de revolución es una **curva plana** ($\tau = 0$).

FORMAS FUNDAMENTALES

Con respecto a la parametrización natural, la **métrica inducida** se puede ver como una **métrica warped product** dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

FORMAS FUNDAMENTALES

Con respecto a la parametrización natural, la **métrica inducida** se puede ver como una **métrica warped product** dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

GEODÉSICAS DE LA SUPERFICIE

Para cada t_o fijo, las curvas $x(s, t_o) := \gamma_{t_o}(s)$ son **geodésicas** de la superficie S , y por tanto, S admite una **foliación geodésica**.

FORMAS FUNDAMENTALES

Con respecto a la parametrización natural, la **métrica inducida** se puede ver como una **métrica warped product** dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

GEODÉSICAS DE LA SUPERFICIE

Para cada t_0 fijo, las curvas $x(s, t_0) := \gamma_{t_0}(s)$ son **geodésicas** de la superficie S , y por tanto, S admite una **foliación geodésica**.

Si $\gamma_{t_0}(s)$ son también geodésicas de $\mathbb{S}^3(\rho)$, S sería una **superficie reglada**.

FORMAS FUNDAMENTALES

Con respecto a la parametrización natural, la **métrica inducida** se puede ver como una **métrica warped product** dada por

$$g = ds^2 + G(s)^2 dt^2.$$

GEODÉSICAS DE LA SUPERFICIE

Para cada t_0 fijo, las curvas $x(s, t_0) := \gamma_{t_0}(s)$ son **geodésicas** de la superficie S , y por tanto, S admite una **foliación geodésica**.

Si $\gamma_{t_0}(s)$ son también geodésicas de $\mathbb{S}^3(\rho)$, S sería una **superficie reglada**.

En caso contrario, la **segunda forma fundamental** viene dada por

$$h = -\kappa(s)ds^2 + \frac{G(s)}{\kappa(s)} (G''(s) + \rho G(s)) dt^2,$$

donde $\kappa(s)$ es la **curvatura** de $\gamma(s)$ en $\mathbb{S}^3(\rho)$.

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Por el [Teorema Fundamental de Subvariedades](#) sabemos que las formas g y h , localmente determinan una única (salvo movimientos rígidos) superficie de revolución S , si y solo si, se verifican las siguientes [ecuaciones de compatibilidad](#)

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Por el **Teorema Fundamental de Subvariedades** sabemos que las formas g y h , localmente determinan una única (salvo movimientos rígidos) superficie de revolución S , si y solo si, se verifican las siguientes **ecuaciones de compatibilidad**

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

$$0 = \left(\frac{1}{\kappa} (G_{ss} + G(\kappa^2 + \rho)) \right)_s - \kappa_s G.$$

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Por el **Teorema Fundamental de Subvariedades** sabemos que las formas g y h , localmente determinan una única (salvo movimientos rígidos) superficie de revolución S , si y solo si, se verifican las siguientes **ecuaciones de compatibilidad**

ECUACIONES DE GAUSS-CODAZZI

$$0 = \left(\frac{1}{\kappa} (G_{ss} + G(\kappa^2 + \rho)) \right)_s - \kappa_s G.$$

Por otro lado, S tendrá **curvatura media constante** (CMC), si existe $H \in \mathbb{R}$, tal que

$$H = \frac{1}{2\kappa G} (G_{ss} - G(\kappa^2 - \rho)).$$

FUNCIONAL DE BLASCHKE GENERALIZADO (1)

Combinando las ecuaciones de Gauss-Codazzi y la de CMC, llegamos a que

FUNCIONAL DE BLASCHKE GENERALIZADO (1)

Combinando las ecuaciones de Gauss-Codazzi y la de CMC, llegamos a que

- $G(s)$ es solución de

$$(K =) - \frac{G_{ss}}{G} = H^2 + \rho,$$

con $\kappa = -H$.

FUNCIONAL DE BLASCHKE GENERALIZADO (1)

Combinando las **ecuaciones de Gauss-Codazzi** y la de **CMC**, llegamos a que

- $G(s)$ es solución de

$$(K =) - \frac{G_{ss}}{G} = H^2 + \rho,$$

con $\kappa = -H$.

- O, por el contrario,

$$G(s) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}},$$

y es solución de

$$G_{ss} + G(H^2 + \rho) = \frac{1}{16G^3}.$$

FUNCIONAL DE BLASCHKE GENERALIZADO (2)

En ambos casos, la **curva perfil** $\gamma(s)$ con curvatura $\kappa(s)$ es una **curva crítica** para el funcional

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds,$$

en la esfera totalmente geodésica $\mathbb{S}^2(\rho)$, [2].

FUNCIONAL DE BLASCHKE GENERALIZADO (2)

En ambos casos, la **curva perfil** $\gamma(s)$ con curvatura $\kappa(s)$ es una **curva crítica** para el funcional

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds,$$

en la esfera totalmente geodésica $\mathbb{S}^2(\rho)$, [2].

- El caso $\kappa = -H$ es un **mínimo global** entre las curvas inmersas en $\mathbb{S}^2(\rho)$ con $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$.

FUNCIONAL DE BLASCHKE GENERALIZADO (2)

En ambos casos, la **curva perfil** $\gamma(s)$ con curvatura $\kappa(s)$ es una **curva crítica** para el funcional

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds,$$

en la esfera totalmente geodésica $\mathbb{S}^2(\rho)$, [2].

- El caso $\kappa = -H$ es un **mínimo global** entre las curvas inmersas en $\mathbb{S}^2(\rho)$ con $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$.
- En el segundo caso, la curvatura de γ , $\kappa(s)$ es solución de la **ecuación de Euler-Lagrange** en el espacio de curvas inmersas en $\mathbb{S}^2(\rho)$ verificando $\kappa > -H$, $\Omega_{\rho_0 \rho_1}$.

CONSTRUCCIÓN

CONSTRUCCIÓN

1. Curvas Críticas

CONSTRUCCIÓN

1. Curvas Críticas
2. Campo de Killing Asociado

CONSTRUCCIÓN

1. Curvas Críticas
2. Campo de Killing Asociado
3. Evolución Binormal

CURVAS CRÍTICAS

En $\mathbb{S}^2(\rho)$, consideramos el **funcional de Blaschke generalizado**

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds.$$

CURVAS CRÍTICAS

En $\mathbb{S}^2(\rho)$, consideramos el **funcional de Blaschke generalizado**

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds.$$

- Para el espacio de curvas $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$, los **círculos** con curvatura $\kappa = -H$ son críticos.

CURVAS CRÍTICAS

En $\mathbb{S}^2(\rho)$, consideramos el **funcional de Blaschke generalizado**

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds.$$

- Para el espacio de curvas $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$, los **círculos** con curvatura $\kappa = -H$ son críticos.
- En el espacio $\Omega_{p_0 p_1}$, la **ecuación de Euler-Lagrange** queda

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa + H}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\kappa + H}} (\kappa^2 + \rho) - 2\kappa\sqrt{\kappa + H} = 0.$$

CURVAS CRÍTICAS

En $\mathbb{S}^2(\rho)$, consideramos el **funcional de Blaschke generalizado**

$$\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa(s) + H} ds.$$

- Para el espacio de curvas $\sqrt{\kappa + H} \in L^1(I)$, los **círculos** con curvatura $\kappa = -H$ son críticos.
- En el espacio $\Omega_{p_0 p_1}$, la **ecuación de Euler-Lagrange** queda

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa + H}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\kappa + H}} (\kappa^2 + \rho) - 2\kappa\sqrt{\kappa + H} = 0.$$

Soluciones: **círculos** de curvatura $\kappa = -H + \sqrt{H^2 + \rho}$;
para $2d > H + \sqrt{H^2 + \rho}$ **curvas determinadas por**

$$\kappa_d(s) = \frac{\rho + H^2}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4Hd - \rho \sin 2\sqrt{H^2 + \rho} s}} - H.$$

CAMPO DE KILLING ASOCIADO

Definimos el **campo de vectores** \mathcal{I} sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}}B.$$

CAMPO DE KILLING ASOCIADO

Definimos el **campo de vectores** \mathcal{I} sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}}B.$$

CAMPO DE KILLING SOBRE γ [4]

Llamamos campo de **Killing sobre** γ a un campo de vectores sobre γ , W , que verifique $W(\nu)(s) = W(\kappa)(s) = 0$.

CAMPO DE KILLING ASOCIADO

Definimos el **campo de vectores** \mathcal{I} sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}}B.$$

CAMPO DE KILLING SOBRE γ [4]

Llamamos campo de **Killing sobre** γ a un campo de vectores sobre γ , W , que verifique $W(v)(s) = W(\kappa)(s) = 0$.

PROPOSICIÓN [3]

El **campo** \mathcal{I} es un campo de vectores de **Killing sobre** γ .

CAMPO DE KILLING ASOCIADO

Definimos el **campo de vectores** \mathcal{I} sobre una curva crítica γ (solución de Euler-Lagrange)

$$\mathcal{I} = G(s)B = \frac{1}{2\sqrt{\kappa(s) + H}}B.$$

CAMPO DE KILLING SOBRE γ [4]

Llamamos campo de **Killing sobre γ** a un campo de vectores sobre γ , W , que verifique $W(\nu)(s) = W(\kappa)(s) = 0$.

PROPOSICIÓN [3]

El **campo \mathcal{I}** es un campo de vectores de **Killing sobre γ** .

Además, este campo de Killing sobre γ , \mathcal{I} , se puede **extender a un campo de vectores de Killing** en todo $\mathbb{S}^3(\rho)$. Lo denotaremos por ξ .

EVOLUCIÓN BINORMAL

- Sea γ una **curva crítica (plana)** del funcional de Blaschke generalizado en $\mathbb{S}^2(\rho)$.

EVOLUCIÓN BINORMAL

- Sea γ una **curva crítica (plana)** del funcional de Blaschke generalizado en $\mathbb{S}^2(\rho)$.
- La evolución de γ bajo el flujo del campo de Killing ξ genera una **superficie de evolución binormal ξ -invariante** S_γ de $\mathbb{S}^3(\rho)$.

EVOLUCIÓN BINORMAL

- Sea γ una **curva crítica (plana)** del funcional de Blaschke generalizado en $\mathbb{S}^2(\rho)$.
- La evolución de γ bajo el flujo del campo de Killing ξ genera una **superficie de evolución binormal ξ -invariante** S_γ de $\mathbb{S}^3(\rho)$.

PROPOSICIÓN [2]

La superficie S_γ es una **superficie de revolución**.

EVOLUCIÓN BINORMAL

- Sea γ una **curva crítica (plana)** del funcional de Blaschke generalizado en $\mathbb{S}^2(\rho)$.
- La evolución de γ bajo el flujo del campo de Killing ξ genera una **superficie de evolución binormal ξ -invariante** S_γ de $\mathbb{S}^3(\rho)$.

PROPOSICIÓN [2]

La superficie S_γ es una **superficie de revolución**.

TEOREMA [2]

La superficie de revolución S_γ tiene **curvatura media constante** H .

COMPACIDAD

COMPACIDAD

1. Condición de Cierre

COMPACIDAD

1. Condición de Cierre
2. Existencia de Curvas Críticas Cerradas

COMPACIDAD

1. Condición de Cierre
2. Existencia de Curvas Críticas Cerradas
3. Clasificación

CONDICIÓN DE CIERRE

Como $\mathbb{S}^3(\rho)$ es **completo**, las rotaciones ϕ_t están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, sus **órbitas son círculos** (cerrados).

CONDICIÓN DE CIERRE

Como $\mathbb{S}^3(\rho)$ es **completo**, las rotaciones ϕ_t están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, sus **órbitas son círculos** (cerrados). Luego, solo necesitamos **curvas perfil cerradas**.

CONDICIÓN DE CIERRE

Como $\mathbb{S}^3(\rho)$ es **completo**, las rotaciones ϕ_t están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, sus **órbitas son círculos** (cerrados). Luego, solo necesitamos **curvas perfil cerradas**.

Las curvas críticas con **curvatura constante** son círculos **cerrados**.

CONDICIÓN DE CIERRE

Como $\mathbb{S}^3(\rho)$ es **completo**, las rotaciones ϕ_t están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, sus **órbitas son círculos** (cerrados). Luego, solo necesitamos **curvas perfil cerradas**.

Las curvas críticas con **curvatura constante** son círculos **cerrados**. Por otro lado, las curvaturas $\kappa_d(s)$ son **periódicas** de período

$$\frac{\pi}{\sqrt{H^2 + \rho}}.$$

CONDICIÓN DE CIERRE

Como $\mathbb{S}^3(\rho)$ es **completo**, las rotaciones ϕ_t están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, sus **órbitas son círculos** (cerrados). Luego, solo necesitamos **curvas perfil cerradas**.

Las curvas críticas con **curvatura constante** son círculos **cerrados**. Por otro lado, las curvaturas $\kappa_d(s)$ son **periódicas** de período

$$\frac{\pi}{\sqrt{H^2 + \rho}}.$$

PROPOSICIÓN [1]

Una **curva crítica** de $\Theta(\gamma) = \int_{\gamma} \sqrt{\kappa + H} ds$ en $\mathbb{S}^2(\rho)$ con **curvatura no constante**, κ_d , será **cerrada** si y solo si

$$\Lambda(d) = 2\sqrt{d\rho} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H^2 + \rho}}} \frac{(\kappa_d(u) + 2H)\sqrt{\kappa_d(u) + H}}{4d(\kappa_d(u) + H) - \rho} du$$

es un **múltiplo racional de 2π** .

CURVAS CRÍTICAS CERRADAS

TEOREMA

Existen **curvas críticas cerradas** con curvatura no constante **inmersas** en $\mathbb{S}^2(\rho)$.

CURVAS CRÍTICAS CERRADAS

TEOREMA

Existen **curvas críticas cerradas** con curvatura no constante **inmersas** en $\mathbb{S}^2(\rho)$.

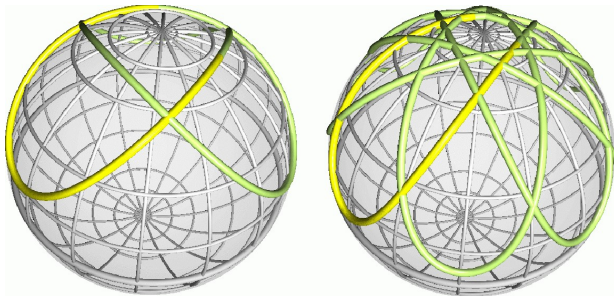


FIGURA: Curvas Críticas Cerradas para $H = 0$, [1].

CLASIFICACIÓN (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

CLASIFICACIÓN (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de **mínimos globales** de Θ , γ con $\kappa = -H$,

CLASIFICACIÓN (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de **mínimos globales** de Θ , γ con $\kappa = -H$,
 1. El **ecuador** $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie **totalmente geodésica**) cuando $H = 0$.

CLASIFICACIÓN (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de **mínimos globales** de Θ , γ con $\kappa = -H$,
 1. El **ecuador** $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie **totalmente geodésica**) cuando $H = 0$.
 2. Superficies **totalmente umbilicales**, $\mathbb{S}^2(r)$ con $r > \rho$, cuando $H \neq 0$.

CLASIFICACIÓN (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de **mínimos globales** de Θ , γ con $\kappa = -H$,
 1. El **ecuador** $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie **totalmente geodésica**) cuando $H = 0$.
 2. Superficies **totalmente umbilicales**, $\mathbb{S}^2(r)$ con $r > \rho$, cuando $H \neq 0$.
- Generadas a partir de **soluciones de Euler-Lagrange**,

CLASIFICACIÓN (1)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de **mínimos globales** de Θ , γ con $\kappa = -H$,
 1. El **ecuador** $\mathbb{S}^2(\rho)$ (superficie **totalmente geodésica**) cuando $H = 0$.
 2. Superficies **totalmente umbilicales**, $\mathbb{S}^2(r)$ con $r > \rho$, cuando $H \neq 0$.
- Generadas a partir de **soluciones de Euler-Lagrange**,
 3. Superficies de evolución binormal isoparamétricas llanas (**Toros de Hopf**)

$$\mathbb{S}^1\left(\sqrt{\rho + \kappa^2}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\kappa}\sqrt{\rho + \kappa^2}\right),$$

con $\kappa = -H + \sqrt{H^2 + \rho}$ curvatura de la **curva perfil**, γ .

CLASIFICACIÓN (2)

Superficies de Revolución Compactas con CMC:

- Generadas a partir de **soluciones de Euler-Lagrange**,
 4. Superficies de evolución binormal **no isoparamétricas** generadas por una **curva perfil**, γ , con curvatura

$$\kappa_d(s) = \frac{\rho + H^2}{2d - H - \sqrt{4d^2 - 4Hd - \rho \sin 2\sqrt{H^2 + \rho}s}} - H,$$

para $d > \frac{H + \sqrt{H^2 + \rho}}{2}$ y verificando la **condición de cierre**.

REFERENCIAS

1. J. Arroyo, [Presión Calibrada Total: Estudio Variacional y Aplicaciones al Problema de Willmore-Chen](#), PhD Thesis UPV/EHU (2001).
2. J. Arroyo, O. J. Garay y A. Pámpano, [Constant Mean Curvature Invariant Surfaces and Extremals of Curvature Energies](#), preprint.
3. O. J. Garay y A. Pámpano, [Binormal Evolution of Curves with Prescribed Velocity](#), WSEAS Trans. Fluid Mech., vol. 11 (2016).
4. J. Langer y D. Singer, [Langrangian Aspects of the Kirchhoff Elastic Rod](#), SIAM Review, vol. 38 (1996).
5. O. M. Perdomo, [Rotational Surfaces in \$S^3\$ with Constant Mean Curvature](#), J. Geom. Anal., vol. 26 (2016).

FIN

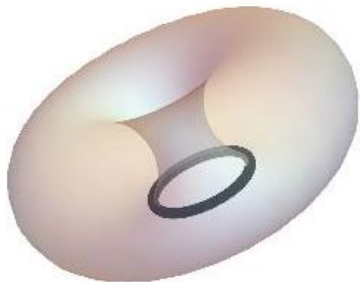


FIGURA: Proyección Estereográfica del Toro de Clifford.