LA TEORÍA CHERN-SIMONS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

Răzvan Gelca — *Texas Tech University*

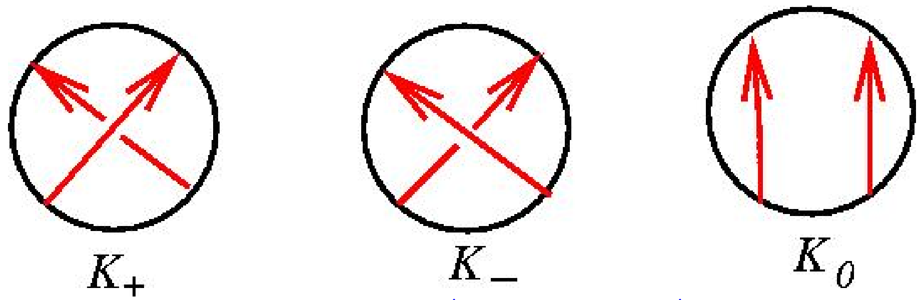
Alejandro Uribe — *University of Michigan*

EN LO SIGUENTE EXPLICAMOS COMO LAS CONSTRUCCIONES DE LAS TEORÍAS TOPOLOGICAS DE CAMPOS CUÁNTICOS DE CHERN-SIMONS SE PUEDEN OBTENER DIRECTAMENTE DE LA TEORÍA DE FUNCIONES THETA. ADEMAS, EXPLICAMOS COMO EL ÁLGEBRA DE LAS LÍNEAS DE WILSON CUANTIZADAS Y LA REPRESENTACIÓN DE RESHETIKHIN-TURAEV SON ANÁLOGOS AL GRUPO DE HEISENBERG Y A LA REPRESENTACIÓN METAPLÉCTICA.

1. LA TEORÍA CHERN-SIMONS

V.F.R. Jones (1984) ha descubierto un invariante polinomial de nudos.

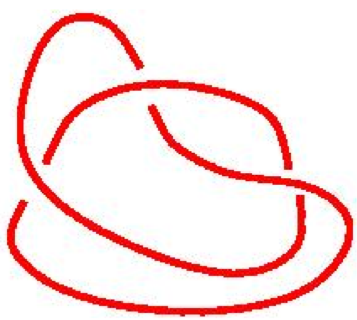
Este polinomio se computa usando la relación de madeja siguiente:



$$t^{-1}V_{K_+}(t) - tV_{K_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_{K_0}(t), \; V_0(t) = 1.$$

Ejemplo: El nudo de trébol izquierdo

$K=$



$$V_K(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.$$

E. Witten (1989) ha explicado este invariante usando las integrales de Feynman que aparecen en la teoría de campos cuánticos.

La teoría de Witten es una teoría Lagrangiana basada en la funcional de Chern-Simons. Dado un grupo de Lie G con álgebra de Lie $\mathfrak{G}$, esta funcional se define para una conexión A en el haz principal trivial sobre una variedad M de dimensión 3 por la fórmula

$$\mathcal{L}(A) = \frac{1}{4\pi} \int_M \mathit{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A).$$

A la variedad M se le asocia el invariante topologico

$$Z(M) = \int_A e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{L}(A)} \mathcal{D}A$$

y a un nudo K en M se le asocia el invariante topologico

$$Z(M, K; V) = \int_A e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{L}(A)} \mathit{tr}_V(\mathit{hol}_K(A)) \mathcal{D}A.$$

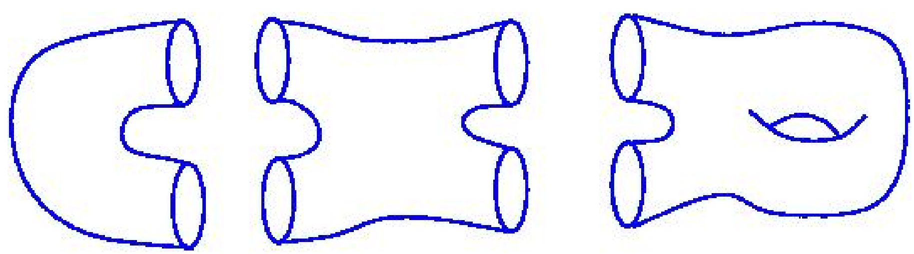
(línea de Wilson cuantizada)

Si $G = SU(2)$, $V = V^2$, la representación de dimensión 2, y $M = S^3$ (esfera de dimensión 3) entonces

$$Z(S^3, K; V) = V_K\left(e^{\frac{2\pi i}{N}}\right)$$

donde V_K es el polinomio de Jones del nudo K.

Witten, Atiyah, Segal, K. Walker (1990's) han desarrollado métodos para calcular estos invariantes: teoría topologica de campos cuánticos.



Reshetikhin y Turaev (1991) construieron rigurosamente invariantes de nudos y 3-variedades que satisfacen las propriedades de los invariantes de Witten. Su construcción es basada en grupos cuánticos.

A un grupo de Lie G se le asocia un álgebra (de Hopf) $U_\hbar(G)$ (grupo cuántico), que es una deformación de su álgebra de Lie $\mathfrak{G}$.

<u>Ejemplos:</u>

1. *Si $\hbar = \frac{1}{N}$, N un entero positivo, y*

$$G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \,|, |z| = 1\}$$

entonces $U_\hbar(U(1)) = \mathbb{C}[\mathbb{Z}_{2N}]$, el álgebra del grupo $\mathbb{Z}_{2N}$.

2. *Si $\hbar = \frac{1}{N}$, N un entero positivo par, y*

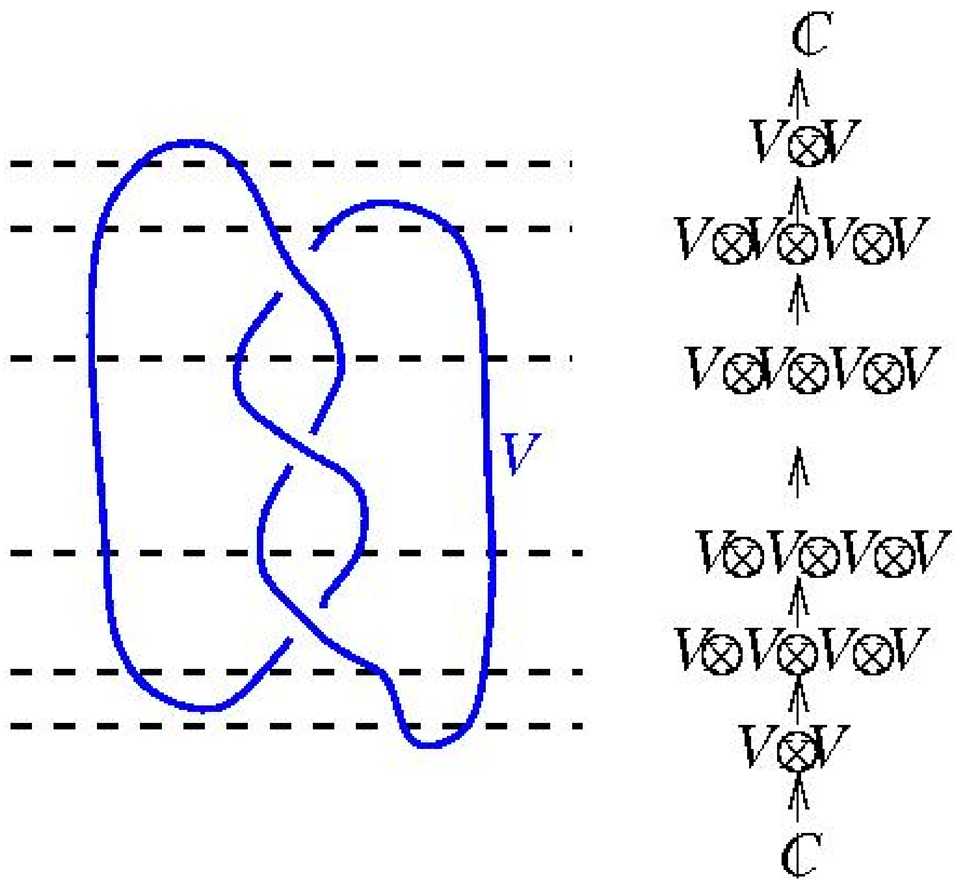
$$G = SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \,|\, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

entonces $U_\hbar(SU(2))$ es un álgebra generada por X, Y, K, K^{-1} que satisfacen

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KX = e^{\frac{2\pi i}{N}} XY, \quad KY = e^{-\frac{2\pi i}{N}} YK,$$

$$XY - YX = \frac{K^2 - K^{-2}}{e^{\frac{2\pi i}{N}} - e^{-\frac{2\pi i}{N}}}, \quad X^{N/2} = Y^{N/2} = 0, \quad K^{2N} = 1.$$

Una representación V del grupo cuántico da lugar a un invariante numérico $Z(S^3, K; V)$ del nudo:

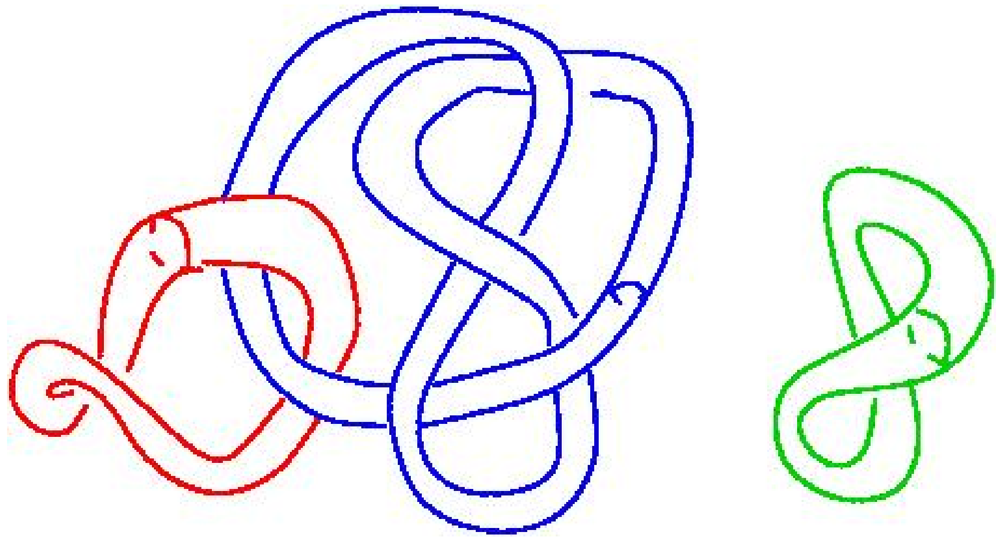


La transformación lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es de la forma $z \to \lambda z$.

$$Z(S^3, K; V) = \lambda.$$

Si $G = SU(2)$ y $V = V^2$, $Z(S^3, K; V^2) = V_K(e^{\frac{2\pi i}{N}})$ (polinomio de Jones).

Cada 3-variedad se obtiene como cirurgía sobre un nudo, o una familia de nudos (enlace) L.



El grupo cuántico tiene una familia de representaciones irreducibles

$$V^1, V^2, \ldots, V^m,$$

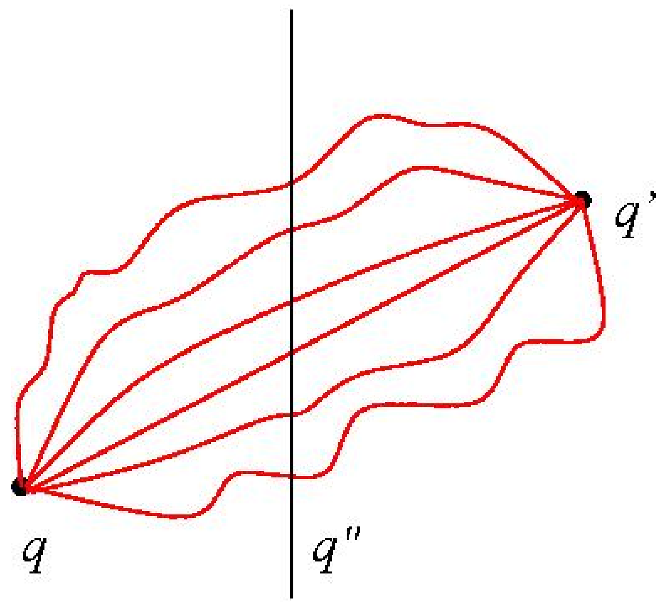
y el invariante de la 3-variedad es de forma

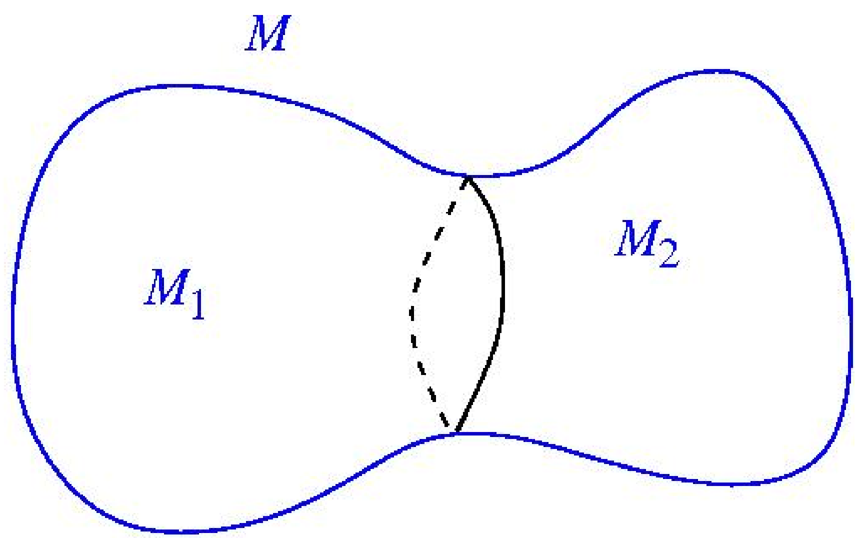
$$Z(M) = \sum_{j=1}^{m} c_j Z(S^3, L; V^j),$$

donde c_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ son algunos coeficientes elegidos de manera que $Z(M)$ es un invariante topológico.

Como el invariante $Z(M)$ en la formulación de Witten es una integral de Feynman, en otras palabras una integral de trayectorias, tiene algunas propiedades de los operadores integrales, a saber:

Si la 3-variedad M se corta en dos variedades M_1 y M_2, entonces $Z(M)$ se obtiene como el producto interno de $Z(M_1)$ y $Z(M_2)$. En este caso $Z(M_1)$ y $Z(M_2)$ no son números, sino vectores en el mismo espacio vectorial.





Pues si M es una variedad con borde, a ∂M se le asocia un espacio vectorial $V(\partial M)$, en qual toma valores el vector $Z(M)$.

E. Witten:

- $V(\partial M)$ *es el espacio de Hilbert de los estados de la cuantización geometrica del espacio de moduli de conexiones de* $\mathfrak{G}$ *en la superficie* $\Sigma = \partial M$.

- *A la función*

$$W_{\gamma,V}(A) = \mathit{tr}_V(\mathit{hol}_\gamma(A)) \quad \textit{(línea de Wilson)}$$

  que asocia a cada conección la traza de su holonomía sobre una curva γ *en* Σ*, corresponde un operador lineal* $\mathit{Op}(W_\gamma(A))$ *sobre el espacio* $V(\Sigma)$.

- *Para pegar dos variedades* M_1 *y* M_2 *con bordes homeomorfos, necesitamos una representación* ρ *del grupo de transformaciones del borde en el grupo de operadores unitarios del espacio de Hilbert.*

Los operadores $\mathit{Op}(W_\gamma(A))$ *están relacionados a la representación* ρ *por*

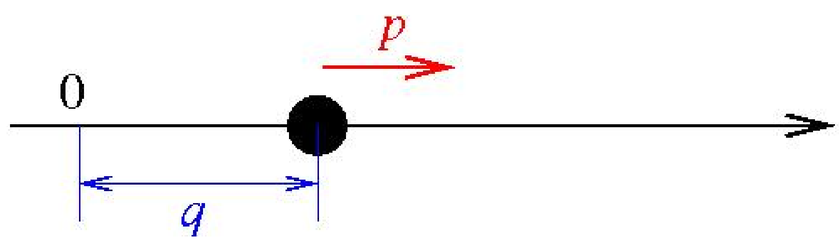
$$\mathit{Op}(W_{h(\gamma)}(A)) = \rho(h)\mathit{Op}(W_\gamma(A))\rho(h)^{-1}.$$

En lo siguente, explicaré como las construcciones de la teoría Chern-Simons se pueden desarrollar usando mecánica cuántica.

2. EL PROTOTIPO

- la representación de Schrödinger
- la representación metapléctica

Aparecen en la cuantización de una partícula unidimensional ($\hbar = 1$).



El espacio de fase es $\mathbb{R}^2$, con coordenadas q: position, p: momento, y forma simpléctica $dp \wedge dq$.

Cuantización: $\mathbb{R}^2 \mapsto L^2(\mathbb{R})$,

$$q \mapsto Q = \text{ multiplicación por } q,$$
$$p \mapsto P = \frac{1}{i}\frac{d}{dq}.$$

El principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$QP - PQ = i\,\mathrm{Id}$$

Los observables P, Q, Id generan el álgebra de Heisenberg, cuyo grupo de Lie es el grupo de Heisenberg:

$$\mathbf{H}(\mathbb{R}) = \{(p,q,t) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$(p,q,t)(p',q',t') = (p+p', q+q', t+t'+\frac{1}{2}(pq'-qp'))$$

Notación: $\exp(pP + qQ + t\mathit{Id}) = (p,q,t)$.

La mecánica cuántica es modelada por la representación de Schrödinger de este grupo:

$$\begin{aligned}
\exp(p_0 P)\phi(q) &= \phi(q+p_0), \\
\exp(q_0 Q)\phi(q) &= e^{iq_0 q}\phi(q) \\
\exp(it\mathit{Id})\phi(q) &= e^{it}\phi(q).
\end{aligned}$$

Teorema (Stone-von Neumann): La representación de Schrödinger es la única representación irreducible unitaria de $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ con la propriedad que $\exp(tE)$ actua como multiplicación por $\exp(2\pi it)$Id.

Corolario: Los cambios de coordenadas lineales (transformaciones simplécticas) se pueden cuantizar.

Recordar que

$$Sp(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

Si $h \in SL(2,\mathbb{R})$, $h(p,q) = (p', q')$, entonces

$$\exp(pP + qQ + t\mathit{Id}) \circ \phi = \exp(p'P + q'Q + t\mathit{Id})\phi$$

es otra representación del grupo de Heisenberg, que, por la teorema Stone-von Neumann, es equivalente a la representación de Schrödinger. Sea $\rho(h)$ el operador unitario que establece la equivalencia.

Por lo tanto hay una representación proyectiva ρ del grupo simpléctico $Sp(2,\mathbb{R})$ en el grupo de operadores unitarios de $L^2(\mathbb{R})$: la representación metapléctica.

Ejemplos:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(S)\phi(p) = \int_{\mathbb{R}} \phi(q) e^{-ipq} dq, \quad \rho(T_a)\phi(q) = e^{iq^2 a}\phi(q).$$

La representación metapléctica se puede interpretar como una transformada de Fourier generalizada (una transformada de Fourier-Mukai).

La representación de Schrödinger y la representación metapléctica están relacionadas por la identidad de Egorov exacta:

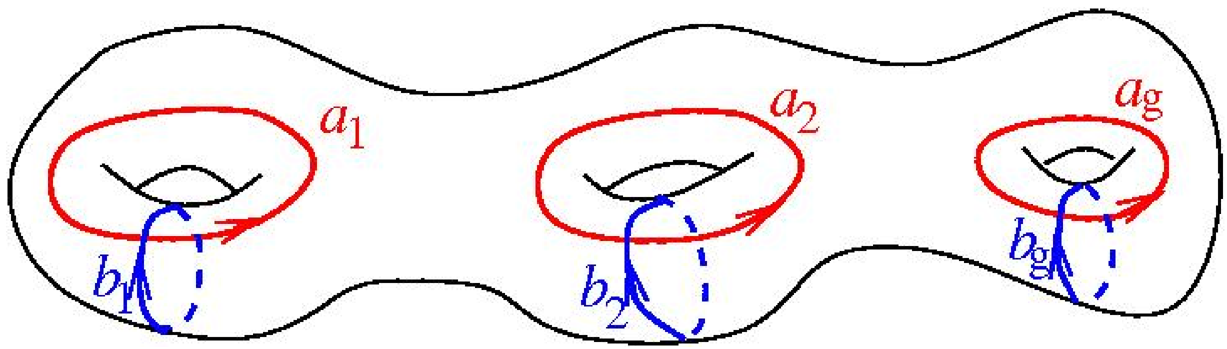
$$\exp[(ap+bq)P + (cp+dq)Q] = \rho(h)\exp(pP+qQ)\rho(h)^{-1}$$

donde

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}).$$

3. LAS FUNCIONES THETA CLÁSICAS

- *Son las funciones holomorfas periodicas mas sencillias sobre el espacio complejo.*
- *Se pueden interpretar como las secciones de un haz en líneas sobre el toro.*
- *En geometría algebraica son asociadas naturalmente a una superficie de Riemann.*
- *Son los estados cuánticos de un número finito de partículas cuánticas con posiciones y momentos periódicos.*
- *La teoría de Chern-Simons abeliana es la teoría de las funciones theta, desde el punto de vista de A. Weil.*



A una

• *SUPERFICIE DE RIEMANN* Σ_g, *DE GÉNERO* g *con una base canonica de* $H_1(\Sigma_g, \mathbb{R})$, $a_1, a_2, \ldots, a_g$, $b_1, b_2, \ldots, b_g$ *se le asocia*

• *LA MATRIZ DE PERÍODOS* (I_g, Π) *definida por una familia de formas holomorfas* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_g$, *que satisfacen*

$$\int_{a_k} \zeta_j = \delta_{jk}, \quad \pi_{jk} = \int_{b_k} \zeta_j, \quad j, k = 1, \ldots, g.$$

Las columnas de (I_g, Π) *generan una latiz* $L(\Sigma_g)$ *en* $\mathbb{C}^g = \mathbb{R}^{2g}$. *El toro complejo*

$$\mathcal{J}(\Sigma_g) = \mathbb{C}^g / L(\Sigma_g) = H_1(\Sigma_g, \mathbb{R}) / H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$$

es la VARIEDAD JACOBIANA DE Σ_g.

$\mathcal{J}(\Sigma_g)$ con la forma simpléctica $\omega = \sum_{j=1}^{g} dx_j \wedge dy_j$, donde $z = x + \Pi y$, es el espacio de fase de g particulas con posiciones y momentos periódicos. Lo cuantizamos con el procedimiento de quantización de H. Weyl.

Sea la constante de Planck $\hbar = \frac{1}{N}$, donde N es un entero positivo par.

La cuantización asocia

- *a la variedad Jacobiana el espacio (de Hilbert) de las funciones theta clásicas. Una base de este espacio son las series theta:*

$$\theta_\mu^\Pi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i N[\frac{1}{2}(\frac{\mu}{N}+n)^T \Pi (\frac{\mu}{N}+n) + (\frac{\mu}{N}+n)^T z]}, \quad \mu \in \mathbb{Z}_N^g.$$

- *a las funciones exponenciales definidas en el toro, operadores lineales que actúan por la fórmula*

$$\mathit{Op}\left(e^{2\pi i (p^T x + q^T y)}\right) \theta_\mu^\Pi(z) = e^{-\frac{\pi i}{N} p^T q - \frac{2\pi i}{N} \mu^T q} \theta_{\mu+p}^\Pi(z).$$

Los operadores asociados a las funciones exponenciales generan un grupo de Heisenberg finito $\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)$, que es el cociente del grupo

$$\mathbf{H}(\mathbb{Z}^g) = \{(p,q,k) \,|\, (p,q) \in \mathbb{Z}^{2g} = H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}), k \in \mathbb{Z}\},$$
$$(p,q,k)(p',q',k') = \left(p+p', q+q', k+k' + \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}\right),$$

por la identificación

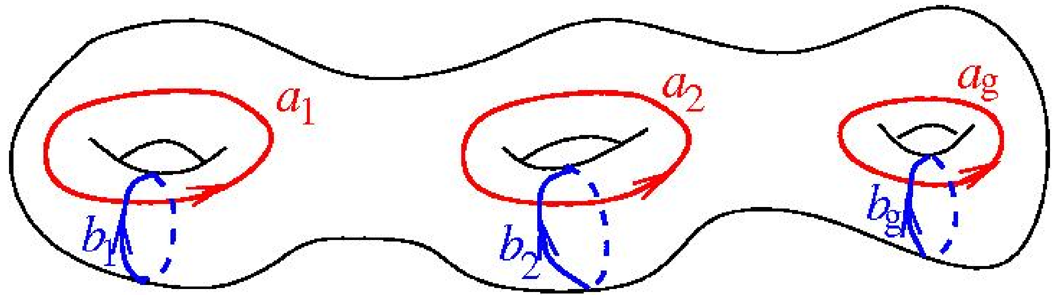
$$(p,q,k) \mapsto e^{\frac{\pi i}{N}k} \mathit{Op}\left(e^{2\pi i (p^T x + q^T y)}\right).$$

La representación de $\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)$ en el espacio de funciones theta se llama la representación de Schrödinger (descubierta por A. Weil).

Teorema (Stone-von Neumann): La representación de Schrödinger de $\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)$ es la unica representación unitaria irreducible de $\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)$ tal que $(0,0,1)$ actúa como multiplicación por $e^{\frac{\pi i}{N}}$.

Un elemento h del grupo de transformaciones de Σ_g induce un simplectomorfismo h_* de $\mathcal{J}(\Sigma_g)$

$$h_* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$



$$h \cdot \mathit{Op}\left(e^{2\pi i(p^T x + q^T y)}\right) = \mathit{Op}\left(e^{2\pi i[(Ap+Bq)^T x + (Cp+Dq)^T y]}\right).$$

Por Stone-von Neumann, $u \cdot \theta_\mu^\Pi = (h \cdot u)\theta_\mu^\Pi$ es equivalente a la representación de Schrödinger. Por lo tanto hay un único automorfismo $\rho(h)$ del espacio de funciones theta que satisface la identidad de Egorov exacta

$$h \cdot \mathit{Op}\left(e^{2\pi i(p^T x + q^T y)}\right) = \rho(h)\mathit{Op}\left(e^{2\pi i(p^T x + q^T y)}\right)\rho(h)^{-1}.$$

$h \to \rho(h)$ es una representación proyectiva del grupo de transformaciones de Σ_g (la acción Hermite-Jacobi).

$\rho(h)$: transformada de Fourier discreta.

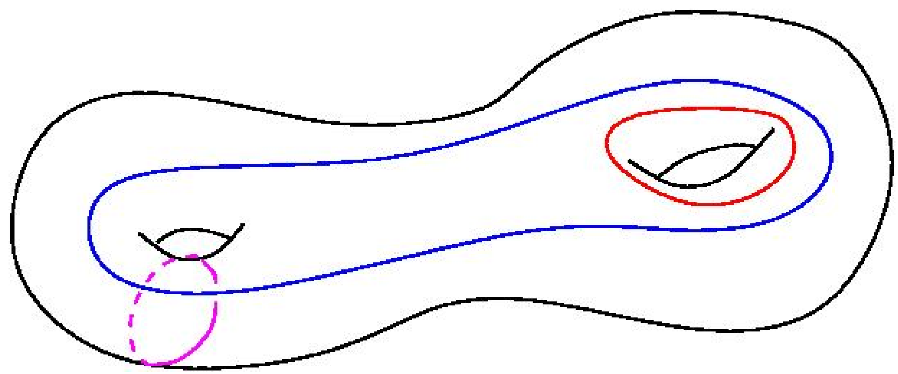
En resumen, tenemos la siguente situación (A. Weil, Acta Math. 1964):

- *el espacio de funciones theta,*
- *una representación del grupo de Heisenberg finito en las funciones theta y una acción del grupo de transformaciones de la superficie en el grupo de Heisenberg,*
- *una representación proyectiva del grupo de transformaciones de la superficie en las funciones theta.*

Las dos representaciones satisfacen la identidad de Egorov exacta.

Extendemos la representación de Schrödinger al álgebra del grupo de Heisenberg $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{Z}^g)]$.

Como este grupo de Heisenberg es una extensión de $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$, *el álgebra* $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{Z}^g)]$ *se puede representar como un álgebra de curvas en la superficie: un álgebra de madejas.*

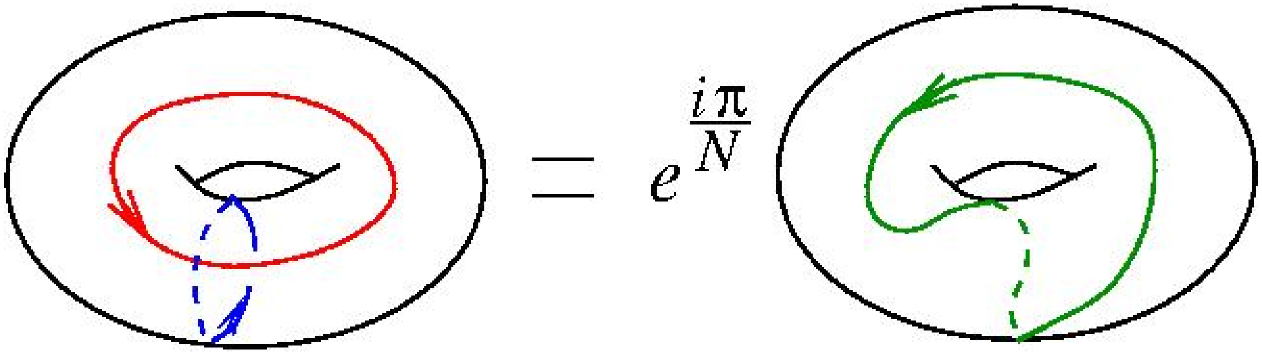


Álgebras y módulos de madejas fueron introducidos por V. Turaev y J. Przytycki. El modelo topologico de las funciones theta es basado en las álgebras y modulos del número de enlace.

Ejemplo: *La multiplicación de las cuantizaciones de funciones exponenciales:*

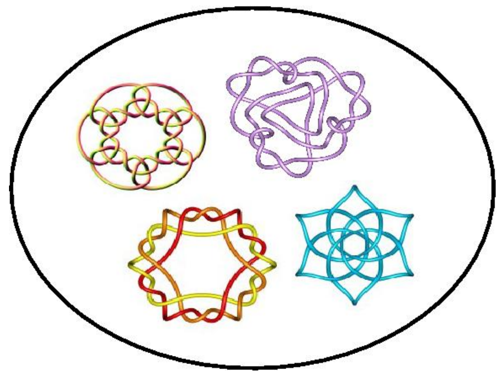
$$\mathit{Op}\left(e^{2\pi i(px+qy)}\right)\,\mathit{Op}\left(e^{2\pi i(p'x+q'y)}\right) = e^{\frac{i\pi}{N}\begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}}\,\mathit{Op}(e^{2\pi i((p+p')x+(q+q')y)}).$$

El determinante es el número de intersecciones de las curvas (p,q) *y* (p',q') *en el toro.*



$$(1,0)\cdot(0,1) = e^{\frac{i\pi}{N}}(1,1)$$

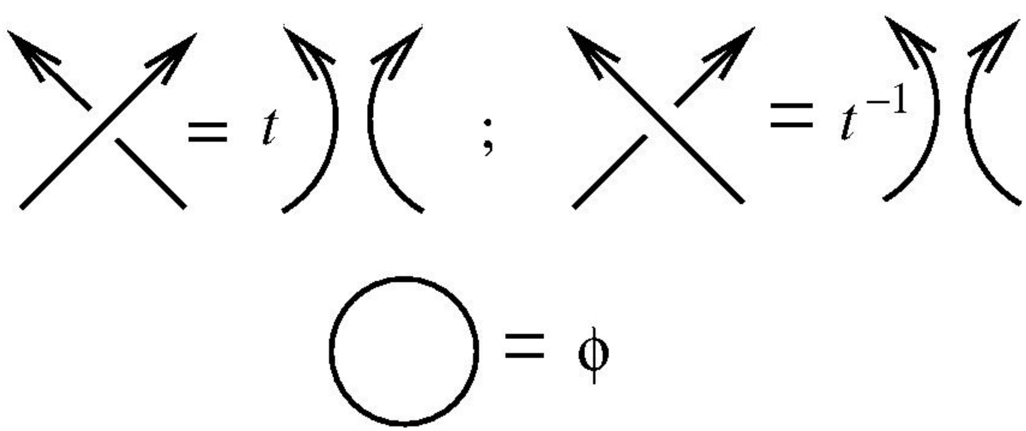
Los módulos de madejas del número de enlace - topologia algebraica basada en nudos (J. Przytycki):



M: 3-variedad orientable, t: variable libre.

Considerar el $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$-módulo libre con base las clases de isotopia de enlaces enmarcados orientados en M, incluyendo el enlace vacio $\emptyset$.

Factorizar este módulo por las relaciones de madeja

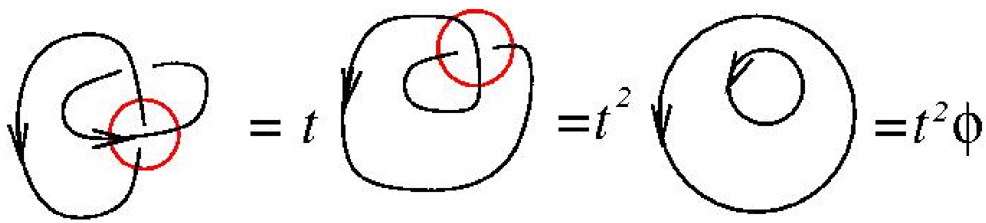


El resultado de la factorización es

$$\mathcal{L}_t(M) = \text{el módulo de madejas del número de enlace de } M.$$

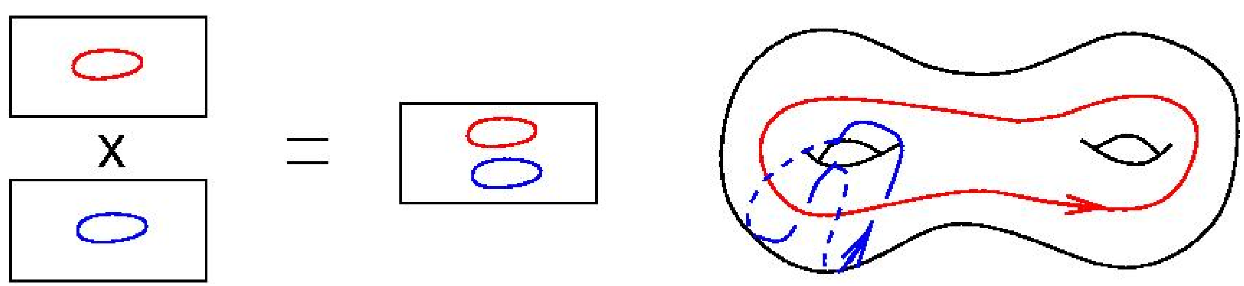
Los elementos de $\mathcal{L}_t(M)$ se llaman madejas.

<u>Ejemplo:</u>



- *Álgebras de madejas del número de enlaces:*

El pegamento $\Sigma_g \times [0,1] \cup \Sigma_g \times [0,1] \approx \Sigma_g \times [0,1]$ induce una multiplicación en $\mathcal{L}_t(\Sigma_g \times [0,1])$.



El pegamento $\partial M \times [0,1] \cup M \approx M$ induce una acción del álgebra $\mathcal{L}_t(\partial M \times [0,1])$ en el módulo $\mathcal{L}_t(M)$.

- *Módulos de madejas reducidos del número de enlace:*

$\widetilde{\mathcal{L}}_t(M) = \mathcal{L}_t(M)/(t = e^{\frac{i\pi}{N}}, \gamma^N = \emptyset) \quad \forall\gamma$ *curva simple orientada, enmarcada* *(γ^N significa N curvas paralelas).*

TEOREMA. (G.-Uribe) El álgebra del grupo de Heisenberg finito $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)]$ es isomorfo al álgebra de madejas reducido del número de enlace $\widetilde{\mathcal{L}}_t(\Sigma_g \times [0,1])$.

TEOREMA. (G.-Uribe) La representación de Schrödinger del álgebra $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)]$ en funciones theta coincide con la acción de $\widetilde{\mathcal{L}}_t(\Sigma_g \times [0,1])$ en $\widetilde{\mathcal{L}}_t(H_g)$, donde H_g es la bola con g manijas.

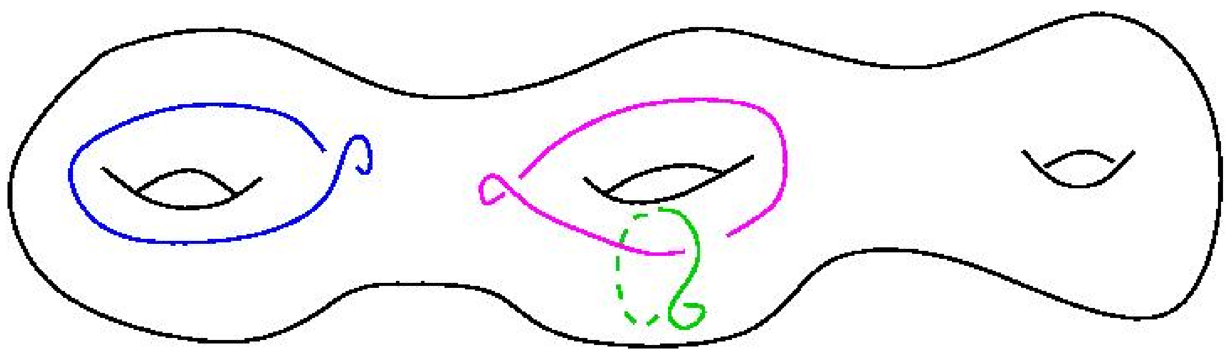
LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

Lema. $\widetilde{\mathcal{L}}_t(\Sigma_g \times [0,1]) =$ el álgebra de todos los operadores lineales en $\widetilde{\mathcal{L}}_t(H_g)$.

Corolario. La transformada de Fourier discreta definida por un elemento del grupo de transformaciones de la superficie se puede representar como la multiplicación por una madeja.

CUAL MADEJA?

Lickorish: Cada elemento del grupo de transformaciones se puede representar como cirurgía en un enalce enmarcado en $\Sigma_g \times [0,1]$.



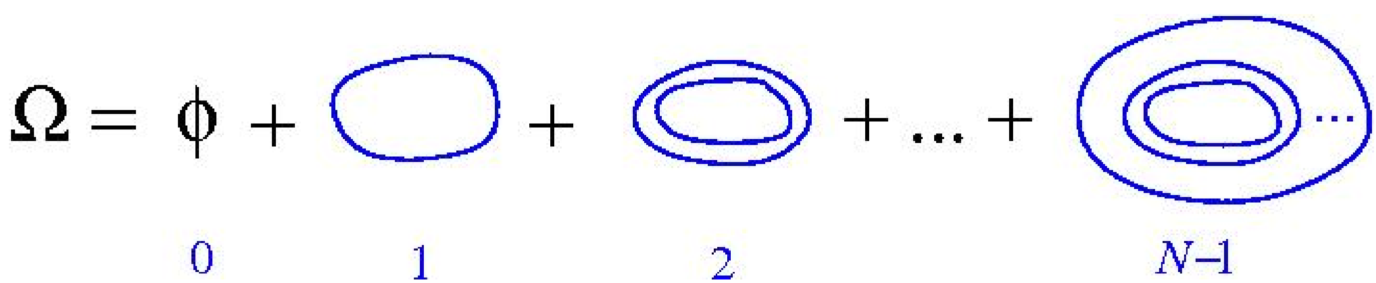
TEOREMA. (G.-Uribe) Sea h un elemento del grupo de transformaciones de Σ_g definido por cirurgía en un enlace enmarcado L_h en $\Sigma_g \times [0,1]$. La trasformada de Fourier discreta

$$\rho(h) : \widetilde{\mathcal{L}}_t(H_g) \to \widetilde{\mathcal{L}}_t(H_g)$$

es de la forma

$$\rho(h)\beta = \Omega(L_h)\beta,$$

donde $\Omega(L_h)$ es la madeja obtenida sustituyendo cada componente de L_h por



Interpretación topologica de la IDENTIDAD DE EGOROV EXACTA

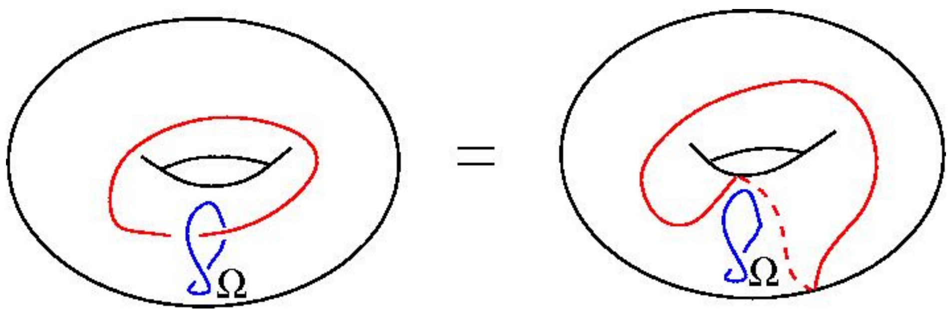
La identidad de Egorov exacta

$$\mathit{Op}\left(f \circ h^{-1}\right) = \rho(h)\mathit{Op}(f)\,\rho(h)^{-1}.$$

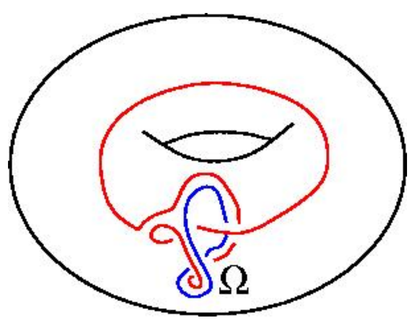
tiene la forma topológica $h(\sigma) = \rho(h)\sigma\rho(h)^{-1}$*, o*

$$\rho(h)\sigma = h(\sigma)\rho(h)$$

donde $\sigma \in \widetilde{\mathcal{L}}_t(\Sigma_g \times [0,1])$.



El diagrama de la derecha es el mismo que



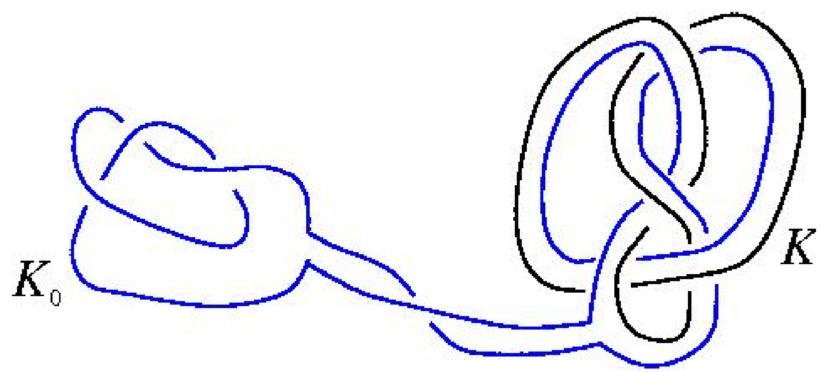
obtenido deslizando una de las curvas sobre la otra.

Como un corolario del teorema Stone-von Neumann obtenemos

TEOREMA. (G.-Uribe) Sea M una 3-variedad orientable, σ una madeja en $\widetilde{\mathcal{L}}_t(M)$ y K_0 y K dos nudos orientados enmarcados en M disjuntos de σ. Entonces, en $\widetilde{\mathcal{L}}_t(M)$,

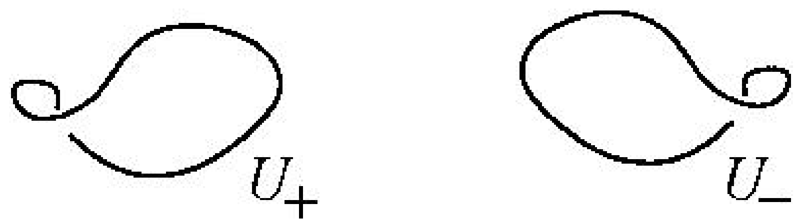
$$\sigma \cup K_0 \cup \Omega(K) = \sigma \cup (K_0 \# K) \cup \Omega(K)$$

donde $K_0 \# K$ es el nudo obtenido deslizando K_0 sobre K.



- *Cada 3-variedad es el borde de una 4-variedad obtenida mediante la adición de manijas $D^2 \times D^2$ por $S^1 \times D^2$ a una bola B^4 de dimensión 4.*
- *La adición de manijas corresponde a una cirurgía de Dehn en $S^3 = \partial B^4$.*
- *Esta cirurgía se puede encodar por un enlace enmarcado.*
- *Deslizar manejas corresponde a deslizar componentes del enlace uno sobre el otro.*

TEOREMA. (R. Kirby) Dos descripciones de la misma variedad como cirurgía de Dehn se pueden transformar una en la otra deslizando manijas y añadiendo y borrando manijas triviales.



Como un corolario del teorema Stone-von Neumann, obtenemos

TEOREMA. (G.-Uribe) Sea M una 3-variedad orientable obtenida por cirurgía en un enlace enmarcado L. Entonces

$$Z(M) = \Omega(U_+)^{-b_+}\Omega(U_-)^{-b_-}\Omega(L)$$

es un invariante topológico de M (b_+ y b_- son los números de valores propios positivos y negativos de la matriz de enlace de L).

4. LAS FUNCIONES THETA NO-ABELIANAS

Son los estados de la cuantización geométrica del espacio de móduli de conexiones planas de un grupo de Lie G en una superficie Σ_g:

$$\mathcal{M}_g^G = \{A \,|\, A : \mathfrak{G} - \text{conección plana}\}/\mathcal{G}$$

donde $\mathcal{G}$ es el grupo de transformaciones de norma $g : \Sigma_g \to G$,

$$A \mapsto g^{-1}Ag + g^{-1}dg.$$

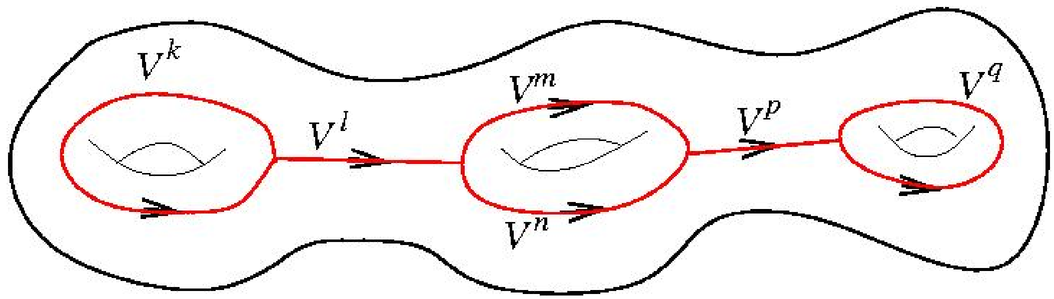
También

$$\mathcal{M}_g^G = \{\rho : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow SU(2)\}/\text{conjugation}$$

Cuantización: $\mathcal{M}_g^G \mapsto$ espacio de funciones theta no-abelianas, que son las secciones holomorfas de un haz en líneas sobre $\mathcal{M}_g^G$.

Si $G = U(1)$ se obtienen las funciones theta clásicas.

Witten: Como un corolario de la teoría de campos conformes, una base del espacio de las funciones theta se puede parametrizar por grafos (orientados y enmarcados) coloreados por representaciones irreducibles del grupo cuántico de G, $U_\hbar(G)$, a la raíz de la unidad $e^{\frac{i\pi}{N}}$ ($\hbar = 1/N$).



Las tres representaciones que se encuentran en cada vértice satisfacen algunas condiciones que dependen del grupo G.

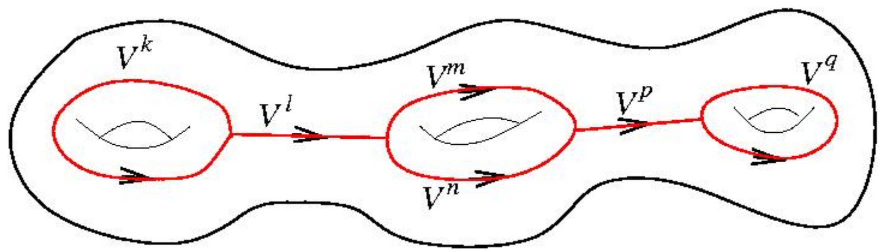
Ejemplo 1: $G = U(1)$, $U_\hbar(U(1)) = \mathbb{C}[\mathbb{Z}_{2N}]$.

- *representaciones:* $V^0, V^1, \ldots, V^{N-1}$ *donde* $V^k = \mathbb{C}$ *con la acción*

$$\hat{1}z \to e^{\frac{\pi i}{N}k} z.$$

- *condición: si* V^m, V^n, V^p *se encuentran en un vértice,*

$$m + n = p.$$



Ejemplo 2: $G = SU(2)$, $U_\hbar(SU(2))$ = álgebra generada por X, Y, K, K^{-1},

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KX = t^2XY, \quad KY = t^{-2}YK,$$

$$XY - YX = \frac{K^2 - K^{-2}}{t^2 - t^{-2}}, \quad X^{N/2} = Y^{N/2} = 0, \quad K^{2N} = 1.$$

- representaciones: $V^1, V^2, \ldots, V^{N/2-1}$ donde $V^k = \mathbb{C}^k$ con la acción

$$Xe_j = \left[\frac{k+1}{2} + j\right] e_{j+1}, \quad Ye_j = \left[\frac{k+1}{2} - j\right] e_{j-1}, \quad Ke^j = e^{\frac{2\pi i}{N}} e_j,$$

donde $[m] = \sin\frac{2\pi m}{N} / \sin\frac{2\pi}{N}$ (entero cuántico).

- condición: si V^m, V^n, V^p se encuentran en un vértice,

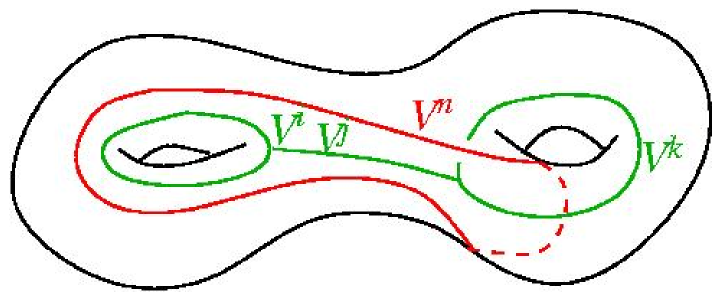
$m + n + p$ impar

$$|m - n| + 1 \leq p \leq \min(m + n - 1, 2r - 2 - m - n).$$

La línea de Wilson

$$W_{\gamma,n}(A) = \mathit{tr}_{V^n}\mathit{hol}_\gamma(A),$$

donde γ es una curva sencilla cerrada, se cuantiza como el operador Op$(W_{\gamma,n})$ obtenido por coloreando la curva γ por V^n:



Además, hay una representación proyectiva ρ del grupo de transformaciones de la superficie en el espacio de los funciones theta no abelianas que satisface una identidad de Egorov exacta:

$$\mathit{Op}(W_{h(\gamma),n}) = \rho(h)\,\mathit{Op}(W_{\gamma,n})\rho(h)^{-1}.$$

ρ: la representación Reshetikhin-Turaev.

El álgebra de los observables cuánticos determina la representación Reshetikhin-Turaev; debido a esto toda la información de la teoría Chern-Simons está contenida en el álgebra generada por los operadores Op$(W_{\gamma,n})$.

En conclusión, nuestro paradigma es: Hay las analogías siguentes

Al nivel del espacio vectorial

a. $L^2(\mathbb{R})$

b. funciones theta clásicas

c. funciones theta no-abelianas

En conclusión, nuestro paradigma es: *Hay las analogías siguentes*

Al nivel del espacio vectorial

a. $L^2(\mathbb{R})$

b. funciones theta clásicas

c. funciones theta no-abelianas

Al nivel de los observables cuánticos

a. El álgebra $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{R})]$ *del grupo de Heisenberg*

b. El álgebra $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)]$ *del grupo de Heisenberg finito*

c. El álgebra generado por las líneas de Wilson cuantizadas Op$(W_{\gamma,n})$

En conclusión, nuestro paradigma es: *Hay las analogías siguentes*

Al nivel del espacio vectorial

a. $L^2(\mathbb{R})$

b. funciones theta clásicas

c. funciones theta no-abelianas

Al nivel de los observables cuánticos

a. El álgebra $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{R})]$ *del grupo de Heisenberg*

b. El álgebra $\mathbb{C}[\mathbf{H}(\mathbb{Z}_N^g)]$ *del grupo de Heisenberg finito*

c. El álgebra generado por las líneas de Wilson cuantizadas Op$(W_{\gamma,n})$

Al nivel de la cuantización de los cambios de coordenadas

a. La representación metapléctica

b. La acción Hermite-Jacobi

c. La representación Reshetikhin-Turaev