TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Răzvan Gelca

(Fortaleza, Brasil)

ISOMETRIAS

Răzvan Gelca

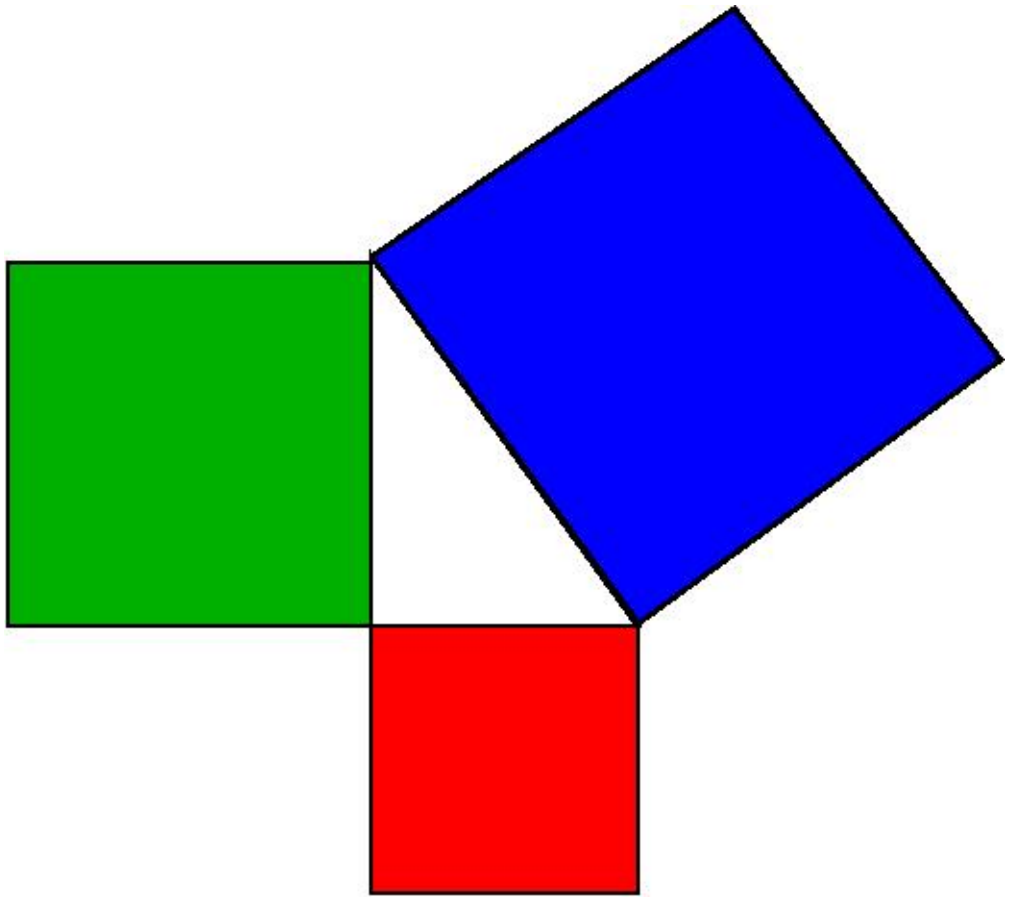
ISOMETRIAS

Răzvan Gelca (USA)

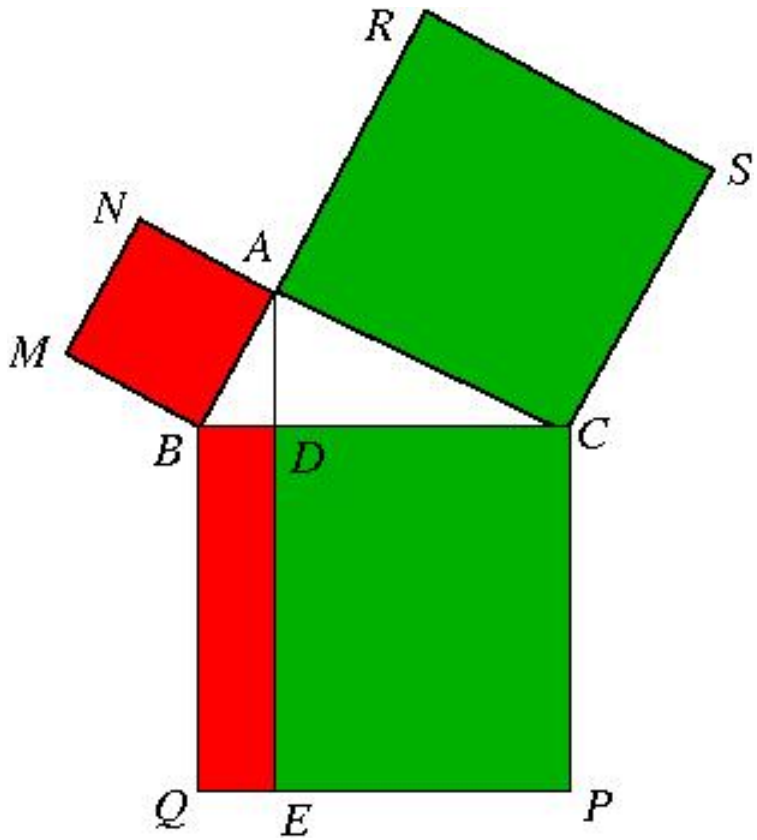
Parte do livro Geometric transformations *com Carlos Yuzo-Shine (Brasil) e Ionuț Onișor (Romênia).*

Teorema de Pitágoras *(*$\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\acute{o}\rho\alpha\varsigma$*) Num triângulo retângulo a suma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*

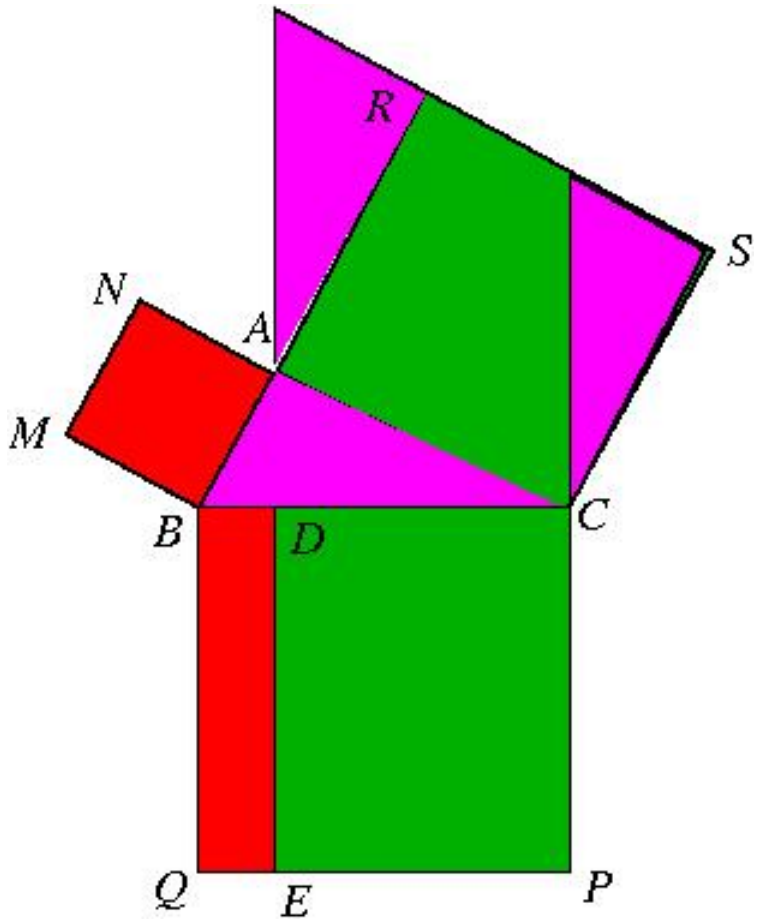
Teorema de Pitágoras ($\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\acute{o}\rho\alpha\varsigma$) *Num triângulo retângulo a suma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*



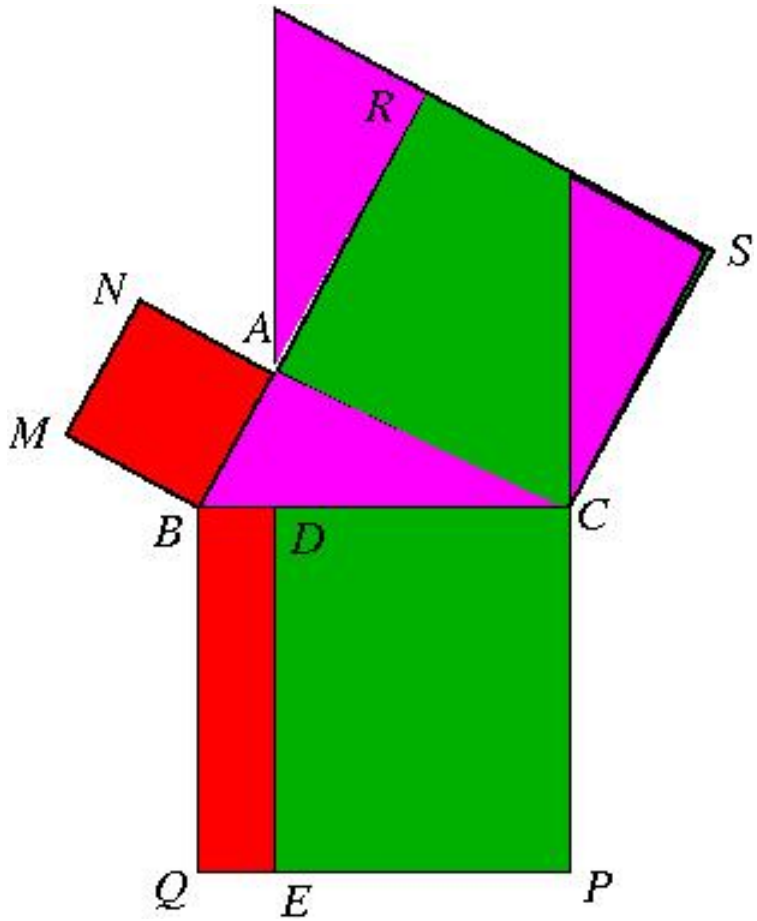
Aqui ha uma demostração con transformaçoes geométricos:



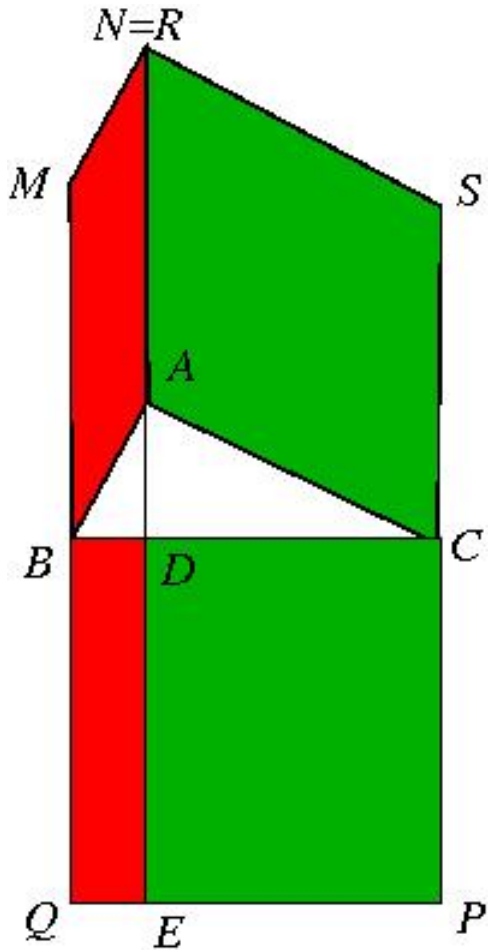
Vamos translatar o triângulo rouxo com ângulo reto $\angle S$ no triângulo rouxo com ângulo reto $\angle R$.



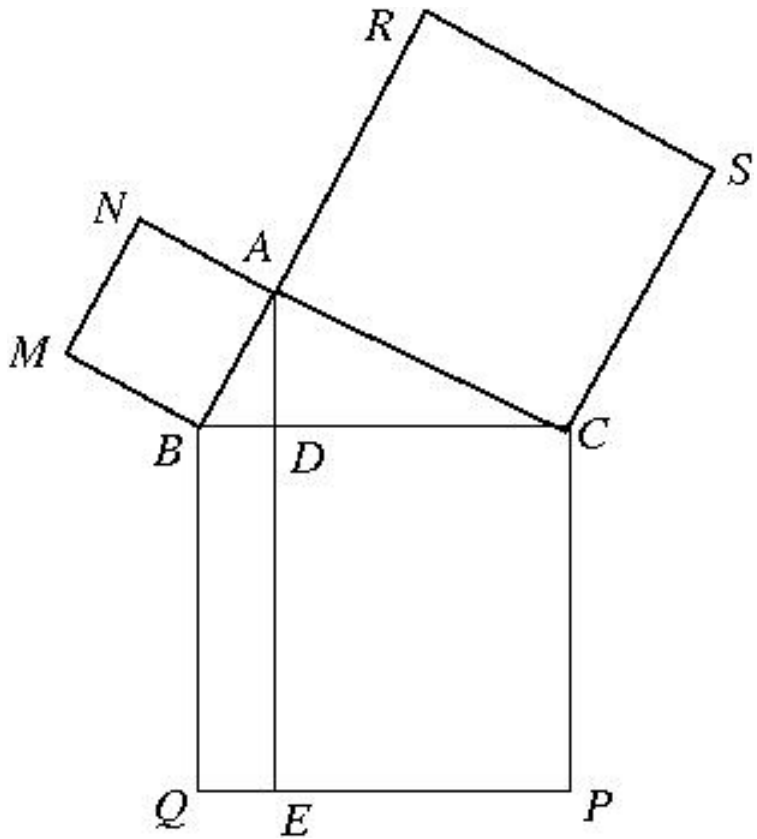
O triângulo rouxo ABC transforma-se nos outros triângulos rouxos por uma rotação de ângulo $90°$.



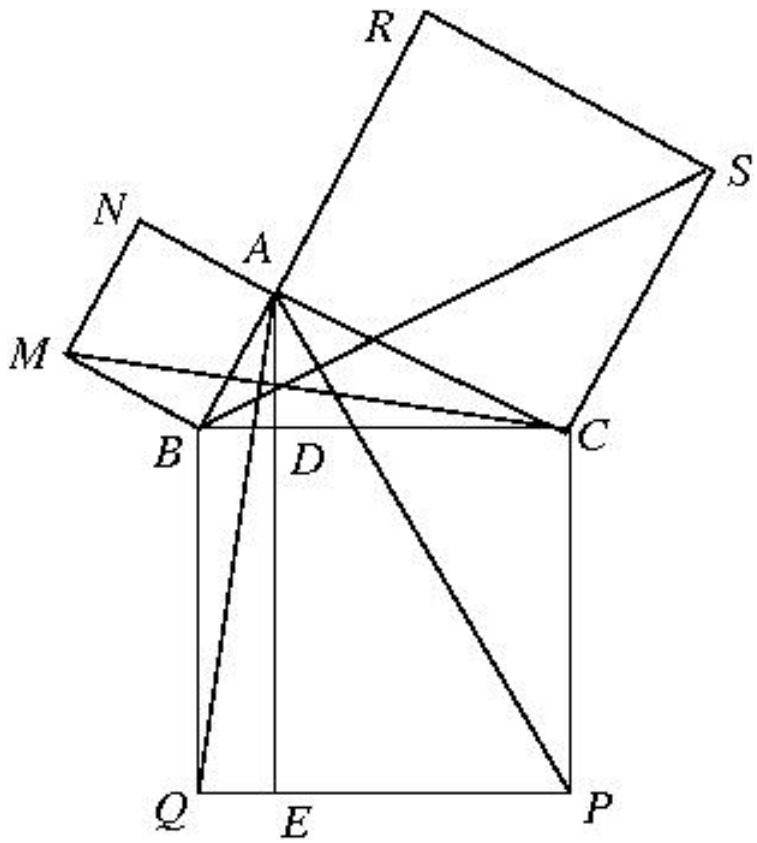
Por isso, os paralelogramas verdes têm a mesma área, e também os paralelogramas vermelhos têm a mesma área.



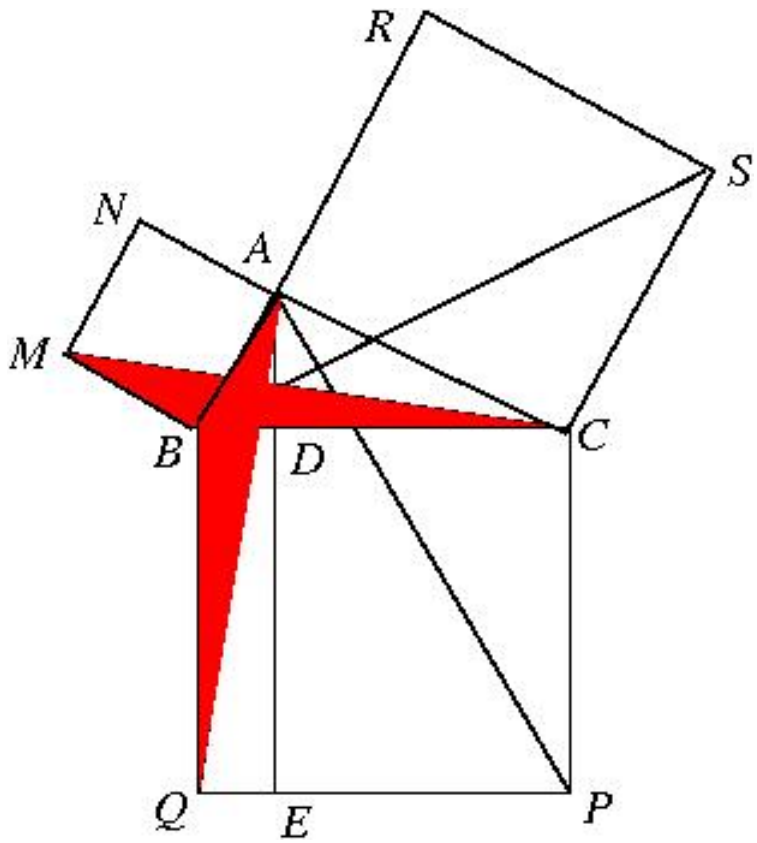
Outro ponto de vista da mesma demostração (que é uma versão da demostração de Euclides - $E\grave{\upsilon}\kappa\lambda\epsilon\acute{\iota}\delta\eta\varsigma$):



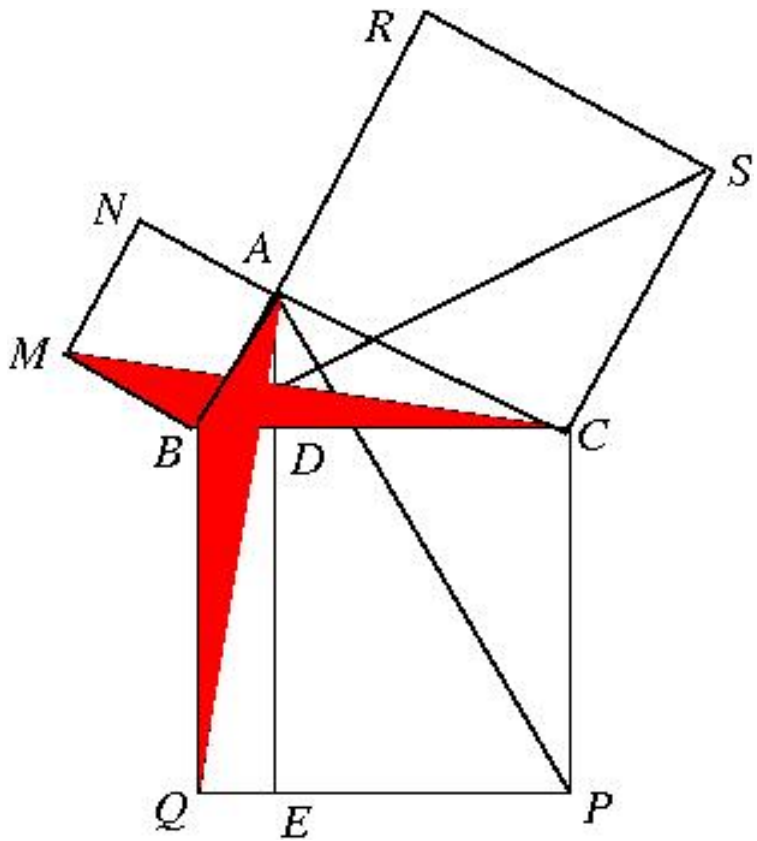
O triângulo MBC gira no triângulo ABQ.



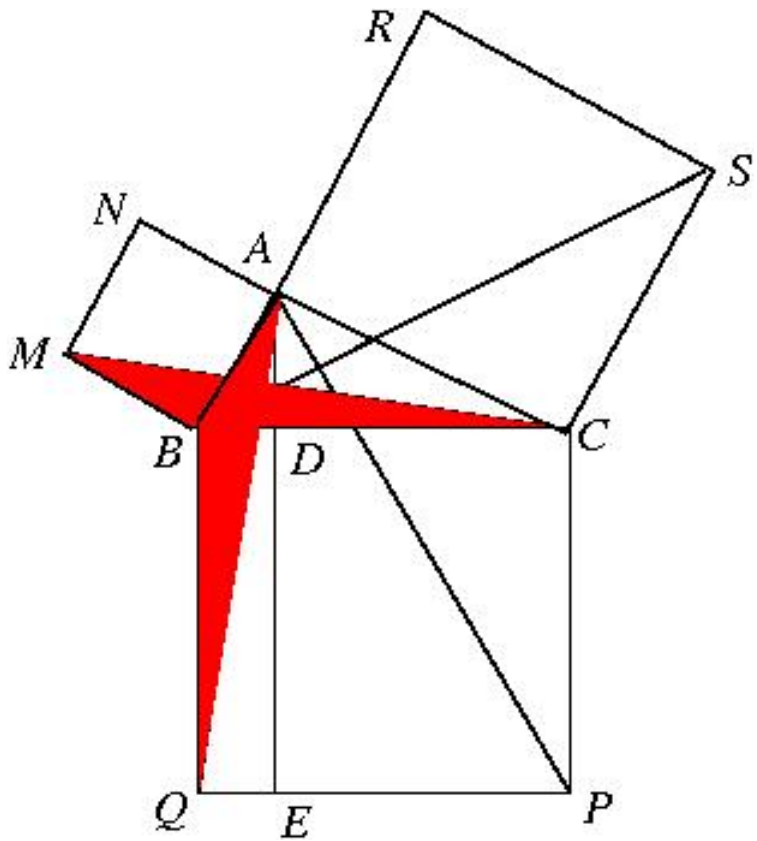
O triângulo MBC gira no triângulo ABQ.



A área do triângulo MBC *é igual a metade da área do retângulo* $ABMN$



A área do triângulo MBC é igual a metade da área do retângulo $ABMN$ e também a área de ABQ é a metade da área de $BDEQ$.



Passamos para outra parte da matemática...

Passamos para outra parte da matemática, teoria dos números.

Passamos para outra parte da matemática, teoria dos números.

<u>Teorema de Wilson</u> *Seja p um número primo. Então*

$$(p-1)! + 1$$

é divisível por p.

Passamos para outra parte da matemática, teoria dos números.

Teorema de Wilson *Seja p um número primo. Então*

$$(p-1)! + 1$$

é divisível por p.

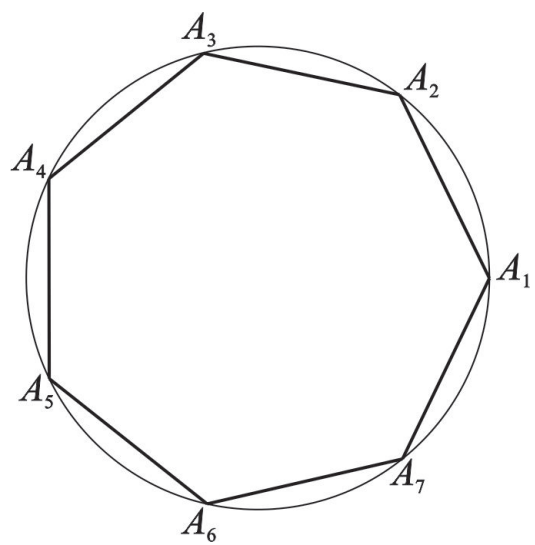
Exemplos:

$$\begin{aligned}
(2-1)! + 1 &= 2 = 2 \times 1 \\
(3-1)! + 1 &= 3 = 3 \times 1 \\
(5-1)! + 1 &= 25 = 5 \times 5 \\
(7-1)! + 1 &= 721 = 7 \times 103 \\
(11-1)! + 1 &= 3628801 = 11 \times 329891.
\end{aligned}$$

O caso $p = 2$ *é claro, por isso fazemos a demostração no caso* $p \geq 3$.

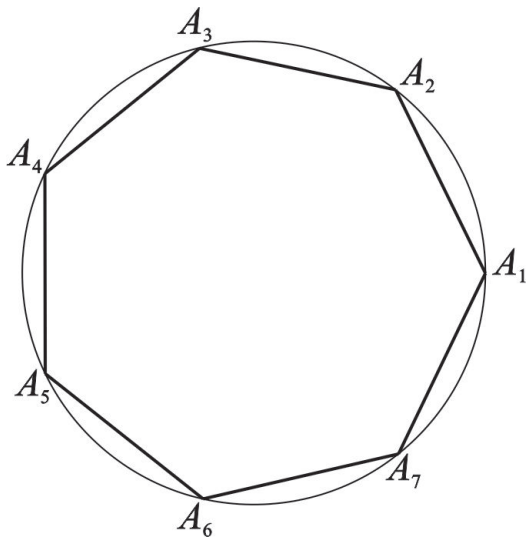
O caso $p = 2$ *é claro, por isso fazemos a demostração no caso* $p \geq 3$.

Consideremos p *pontos que saõ os vértices de um polígono regular.*



O caso $p = 2$ *é claro, por isso fazemos a demostração no caso* $p \geq 3$.

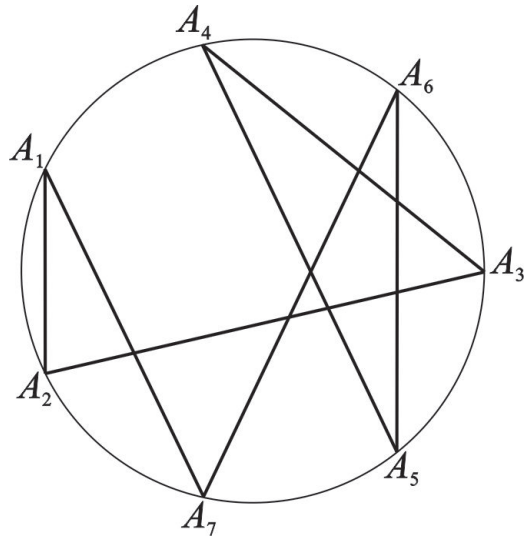
Consideremos p *pontos que saõ os vértices de um polígono regular.*



Pergunta: *Quantos polígonos existem cujos vértices sejam os* p *pontos?*

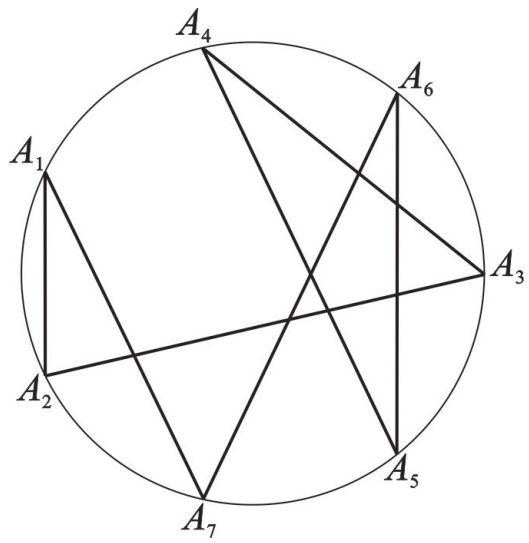
<u>Pergunta:</u> *Quantos polígonos existem cujos vértices sejam os p pontos?*

Aqui ha um exemplo:



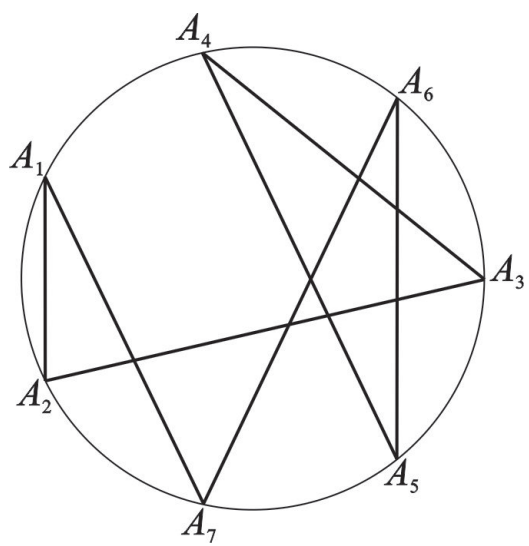
<u>Pergunta:</u> *Quantos polígonos existem cujos vértices sejam os p pontos?*

O primeiro vértice pode ser escolhido em p modos,



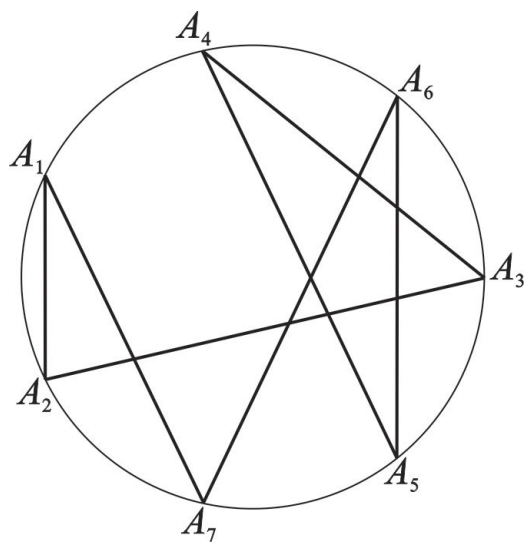
Pergunta: *Quantos polígonos existem cujos vértices sejam os p pontos?*

O primeiro vértice pode ser escolhido em p modos, o segundo vértice pode ser escolhido em $p-1$ modos,



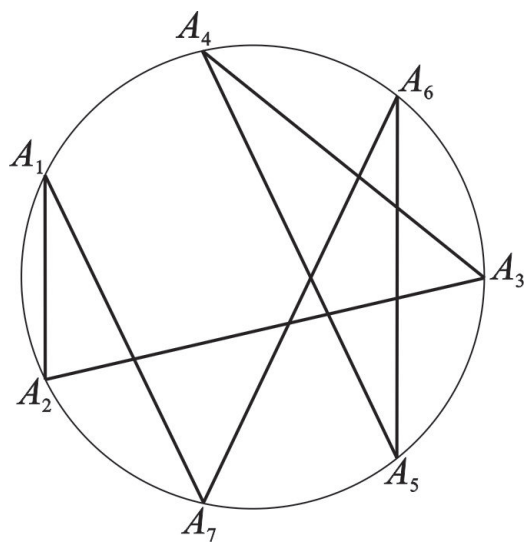
Pergunta: *Quantos polígonos existem cujos vértices sejam os p pontos?*

O primeiro vértice pode ser escolhido em p modos, o segundo vértice pode ser escolhido em $p-1$ modos, o terceiro em $p-2$ modos, ...



Pergunta: *Quantos polígonos existem cujos vértices sejam os p pontos?*

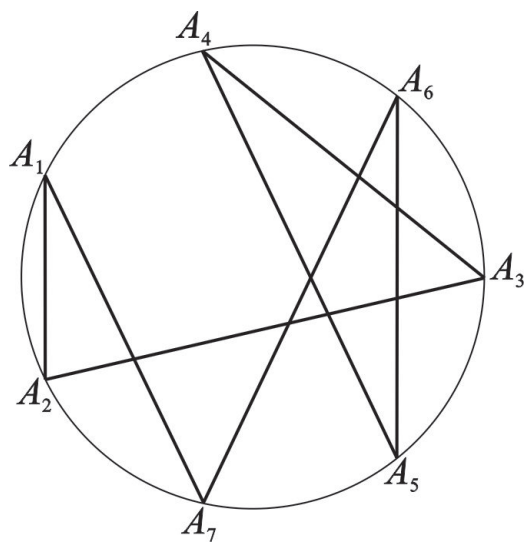
O primeiro vértice pode ser escolhido em p modos, o segundo vértice pode ser escolhido em $p-1$ modos, o terceiro em $p-2$ modos, ...



O número total é: $p(p-1)(p-2)\cdots 1 = p!$.

<u>Pergunta:</u> *Quantos polígonos existem cujos vértices sejam os p pontos?*

O primeiro vértice pode ser escolhido em p modos, o segundo vértice pode ser escolhido em $p-1$ modos, o terçeiro em $p-2$ modos, ...



O número total é: $p(p-1)(p-2)\cdots 1 = p!$. **Porém...**

Podemos começar com cada vértice do polígono, e por isso contamos cada polígono p vezes.

Podemos começar com cada vértice do polígono, e por isso contamos cada polígono p vezes.

E também, podemos andar na outra direção, deste modo contamos cada polígono duas vezes.

Podemos começar com cada vértice do polígono, e por isso contamos cada polígono p vezes.

E também, podemos andar na outra direção, deste modo contamos cada polígono duas vezes.

Concluímos que o número total de polígonos é:

$$\frac{p!}{2p} = \frac{(p-1)!}{2}.$$

Podemos começar com cada vértice do polígono, e por isso contamos cada polígono p vezes.

E também, podemos andar na outra direção, deste modo contamos cada polígono duas vezes.

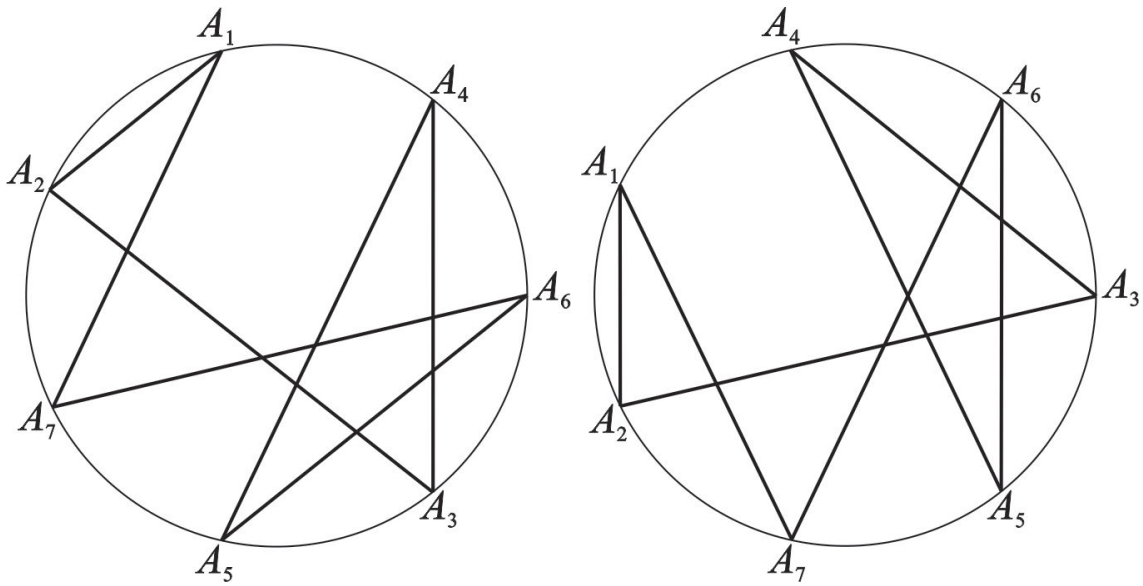
Concluímos que o número total de polígonos é:

$$\frac{p!}{2p} = \frac{(p-1)!}{2}.$$

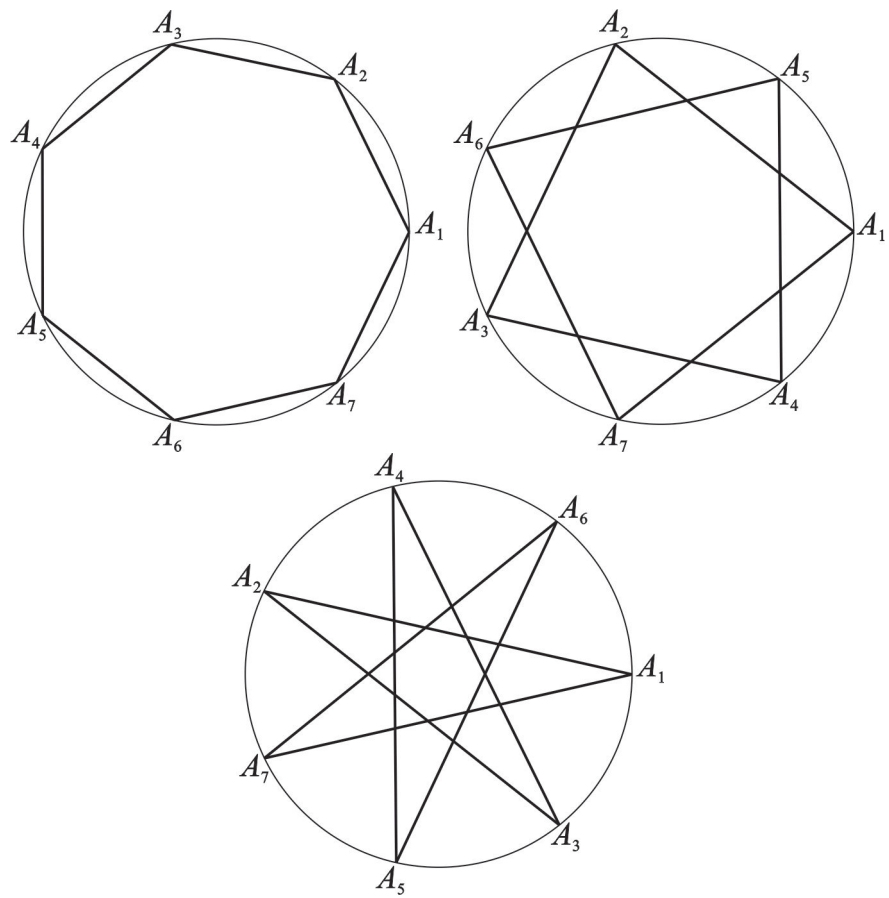
E agora pedimos algo mais dificil:

Contar o número de polígonos, se identificamos polígonos por rotações.

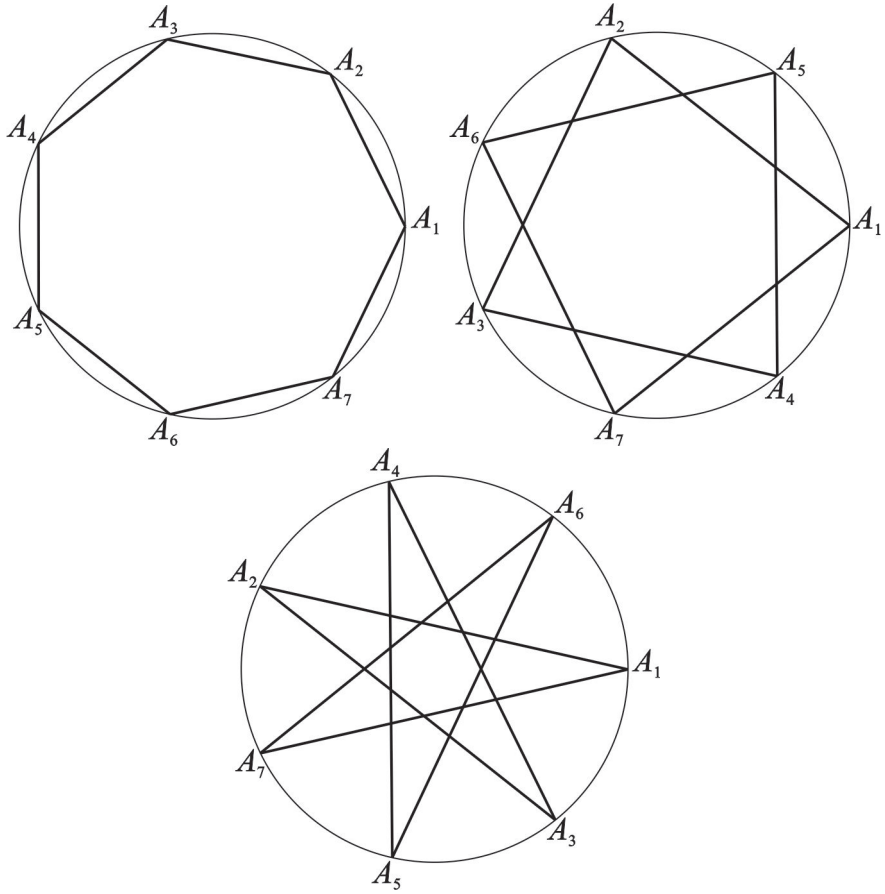
Por exemplo, os seguintes polígonos são idênticos:



Porque p é um número primo, os unicos polígonos que são invariaveis por rotações são os polígonos estrelados:



Contamos os polígonos estrelados usando a lado que começa em A_1*, porque o polígono é determinado por este lado. Temos* $p-1$ *posibilidades.*



Contamos os polígonos estrelados usando a lado que começa em A_1*, porque o polígono é determinado por este lado. Temos* $p-1$ *posibilidades. Mas neste caso contamos cada polígono duas vezes, e por isso existem*

$$\frac{p-1}{2}$$

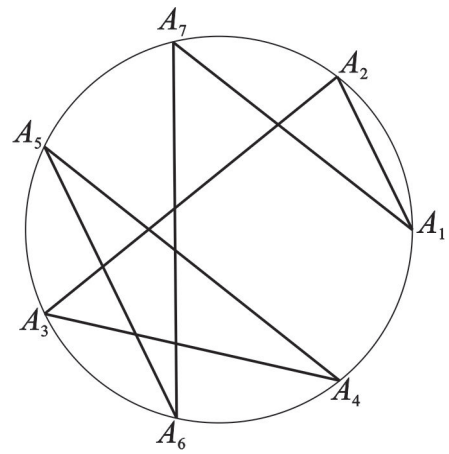
polígonos estrelados.

Obtemos que existem

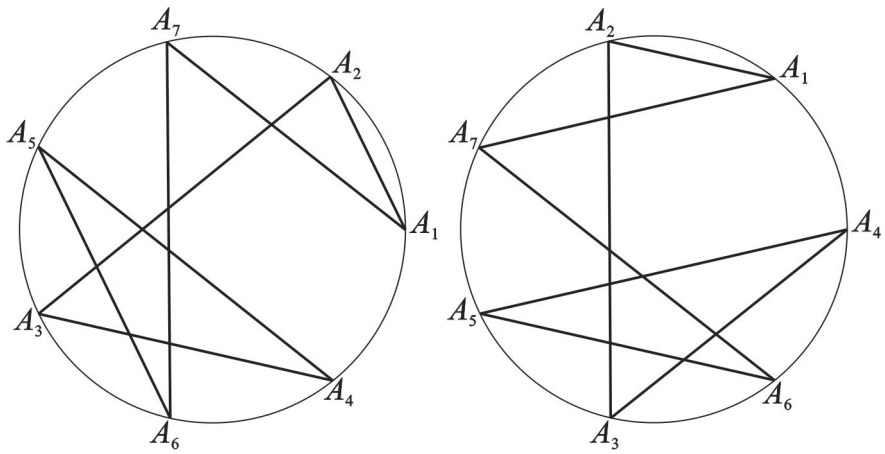
$$\frac{(p-1)!}{2} - \frac{p-1}{2} = \frac{(p-1)!+1}{2} - \frac{p}{2}$$

polígonos que não são estrelados.

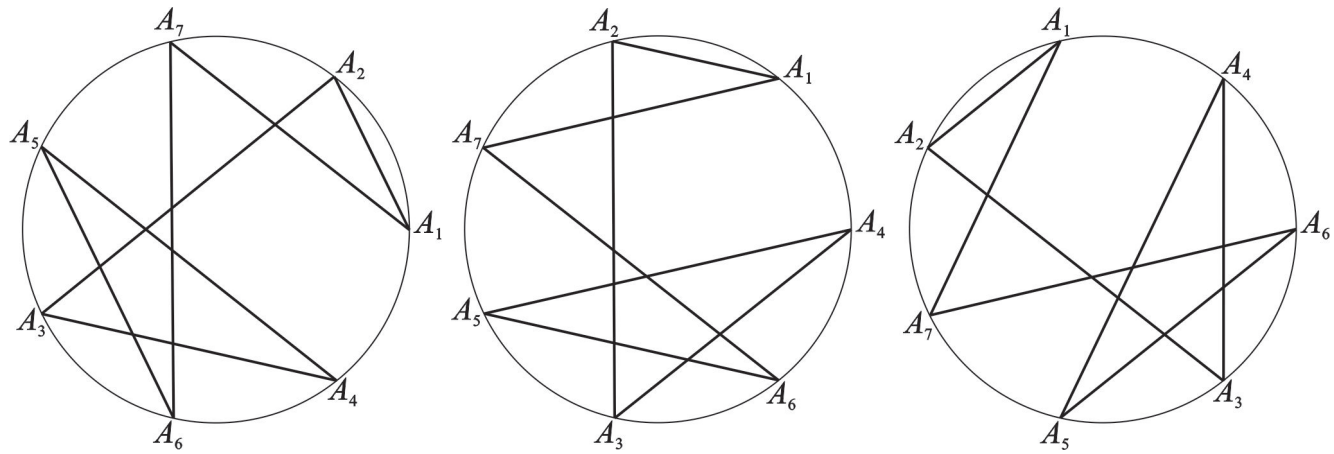
Cada polígono que não é estrelado, é identificado com $p-1$ *outros.*



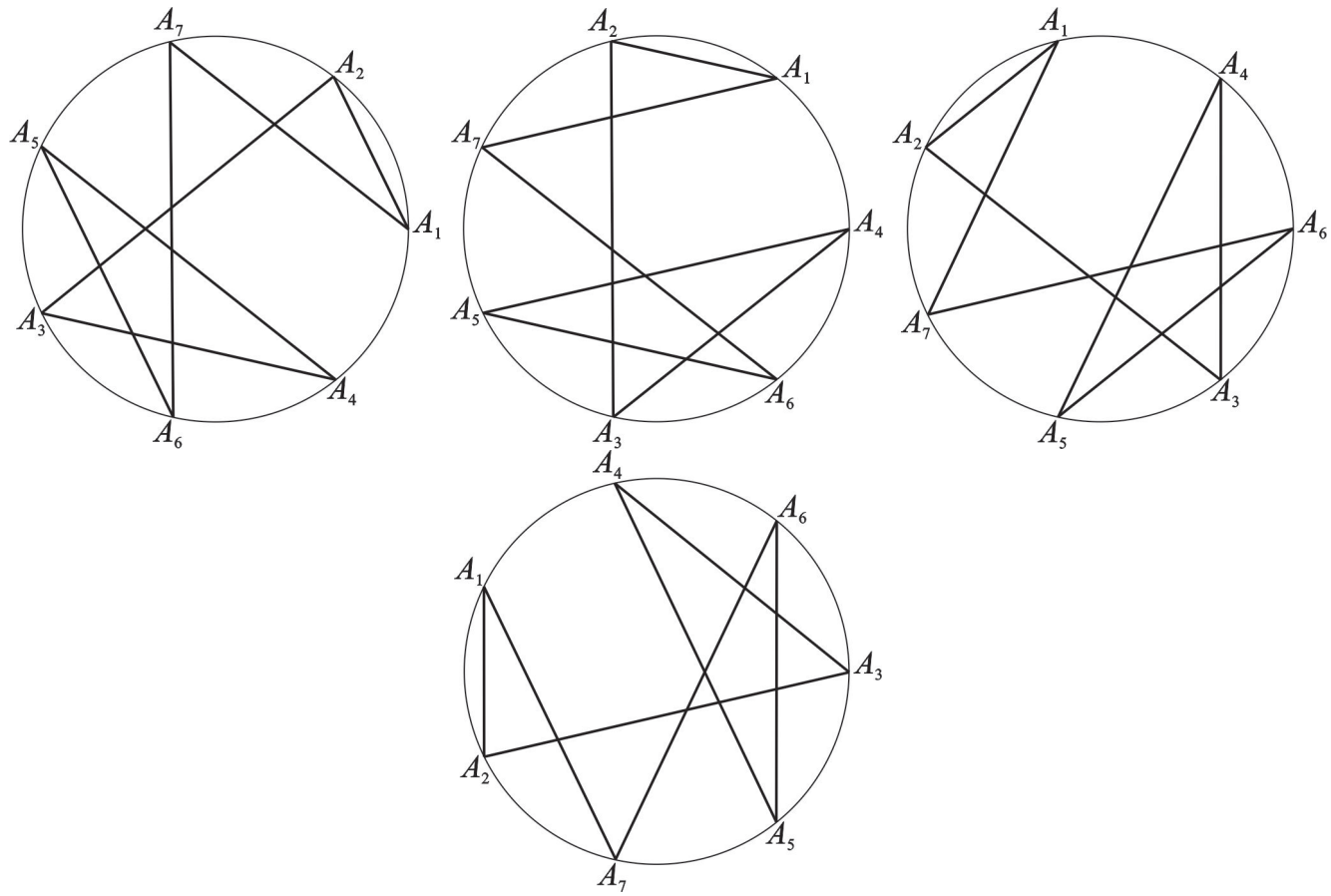
Cada polígono que não é estrelado, é identificado com $p-1$ *outros.*



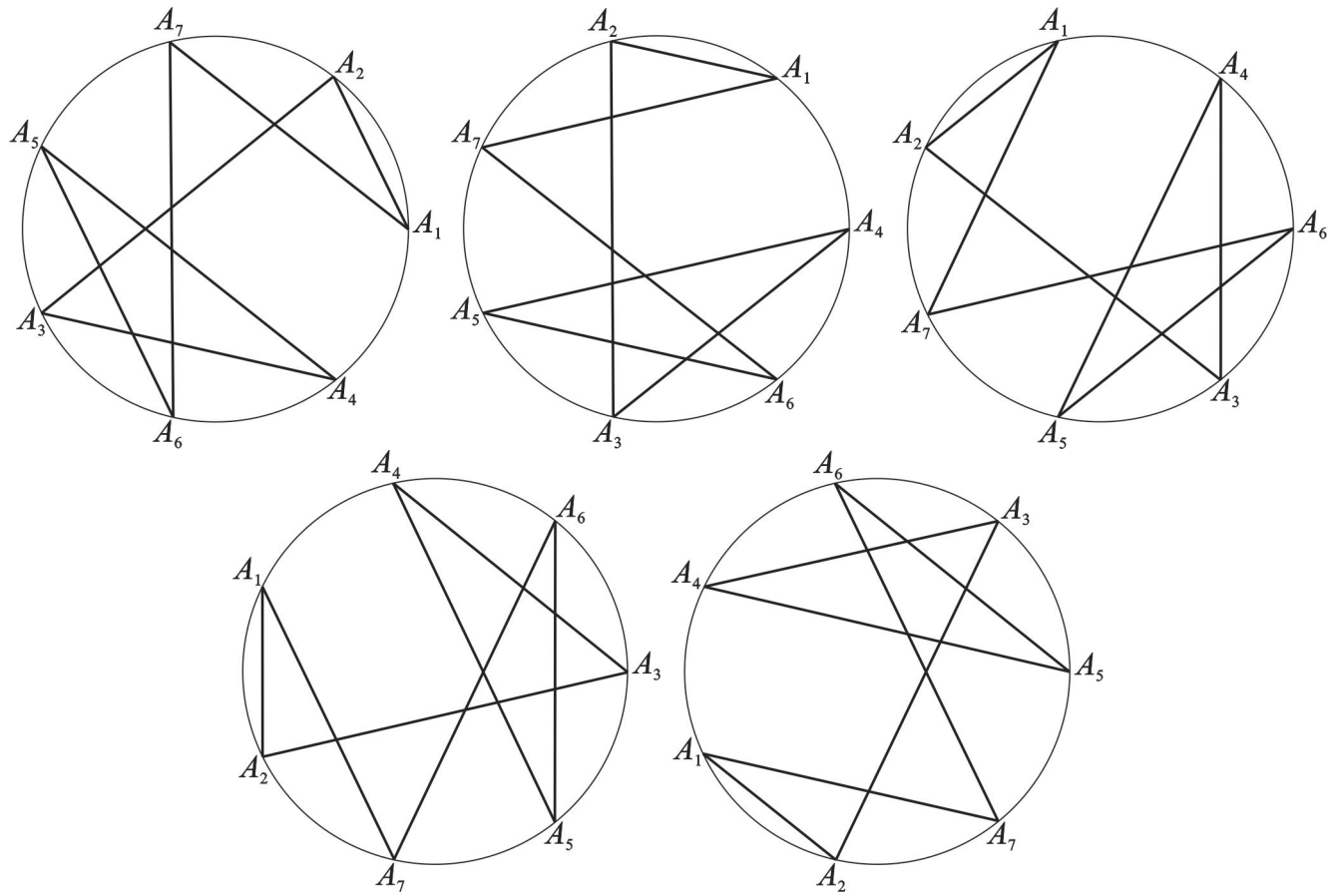
Cada polígono que não é estrelado, é identificado com $p-1$ *outros.*



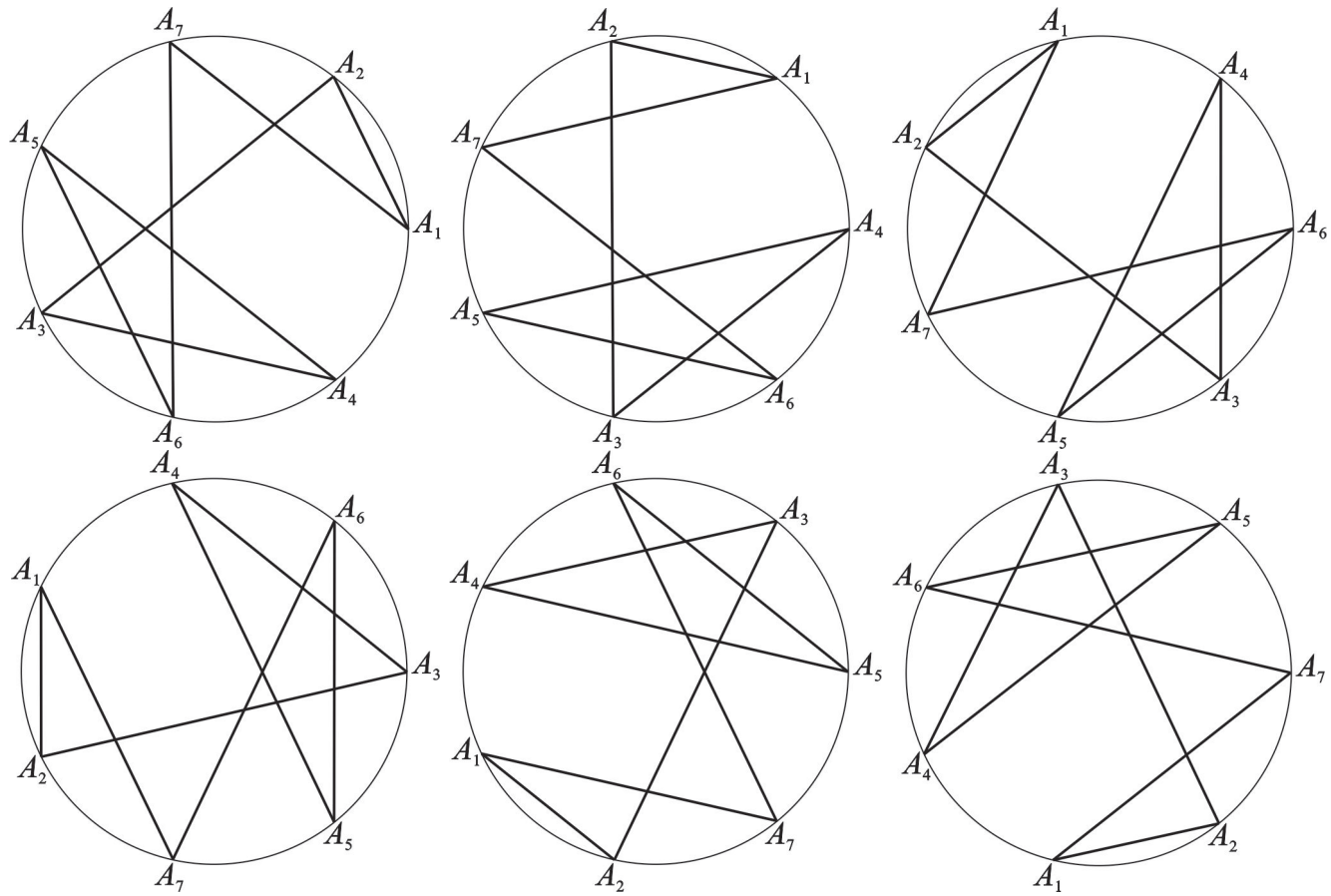
Cada polígono que não é estrelado, é identificado com $p-1$ *outros.*

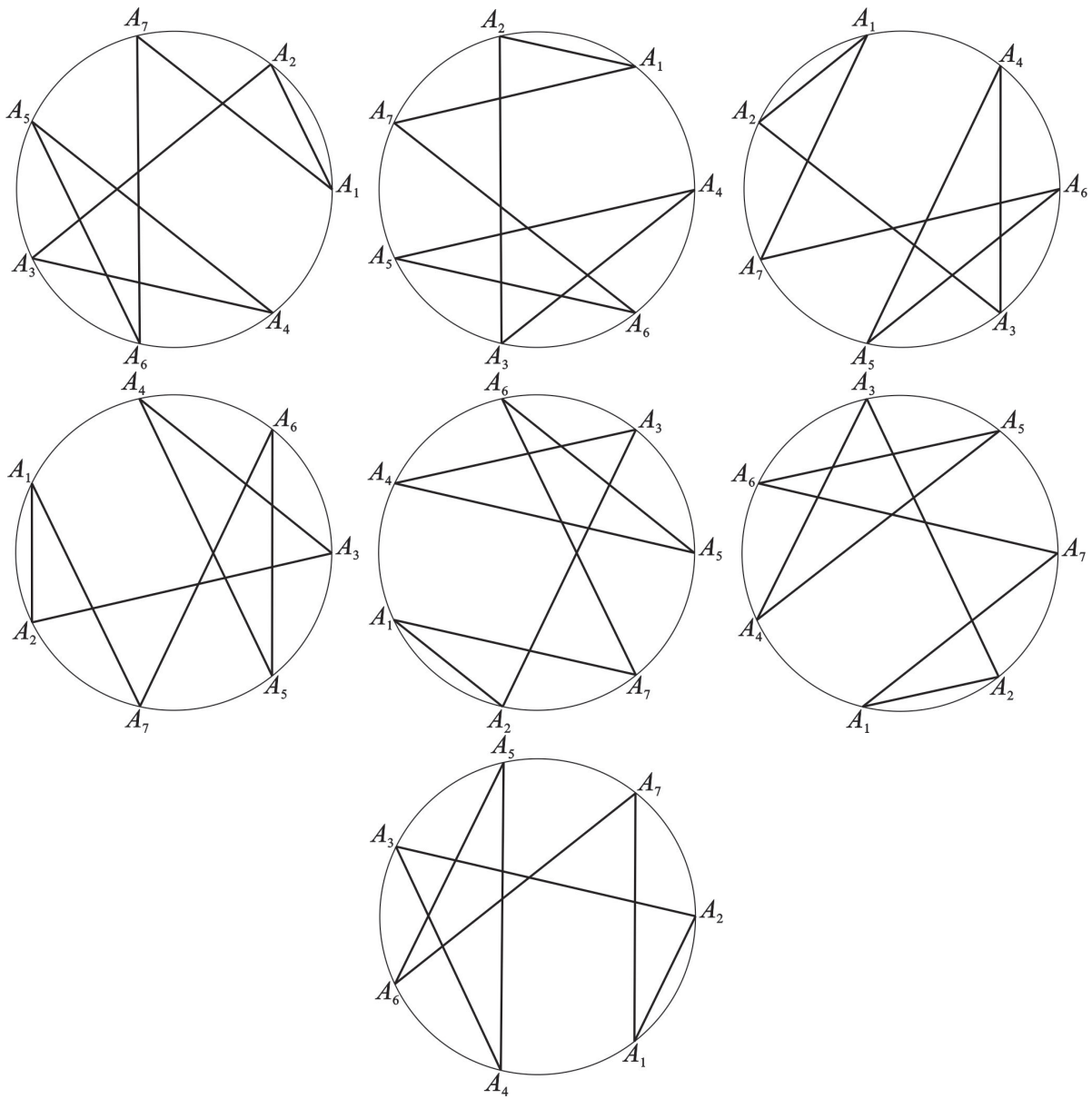


Cada polígono que não é estrelado, é identificado com $p-1$ *outros.*



Cada polígono que não é estrelado, é identificado com $p-1$ *outros.*




A_7 A_2 A_5 A_1 A_3 A_4 A_6
A_2 A_1 A_7 A_4 A_5 A_6 A_3
A_1 A_4 A_2 A_6 A_7 A_3 A_5
A_4 A_6 A_1 A_3 A_2 A_5 A_7
A_6 A_3 A_4 A_5 A_1 A_7 A_2
A_3 A_5 A_6 A_7 A_4 A_2 A_1
A_5 A_7 A_3 A_2 A_6 A_1 A_4

Concluímos que a resposta da pergunta é:

$$\frac{p-1}{2} + \frac{1}{p}\left[\frac{(p-1)!+1}{2} - \frac{p}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[p + \frac{(p-1)!+1}{p}\right] - 1.$$

Concluímos que a resposta da pergunta é:

$$\frac{1}{2}\left[p + \frac{(p-1)! + 1}{p}\right] - 1.$$

Isso e um número inteiro somente se $(p-1)! + 1$ *é divisível por* p.

Concluímos que a resposta da pergunta é:

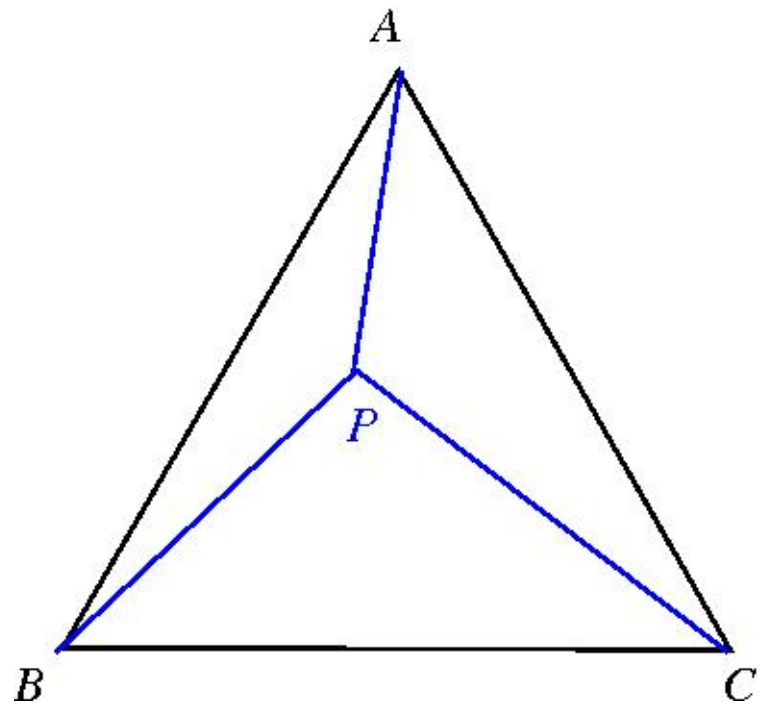
$$\frac{1}{2}\left[p + \frac{(p-1)! + 1}{p}\right] - 1.$$

Isso e um número inteiro somente se $(p-1)! + 1$ *é divisível por* p. *QED.*

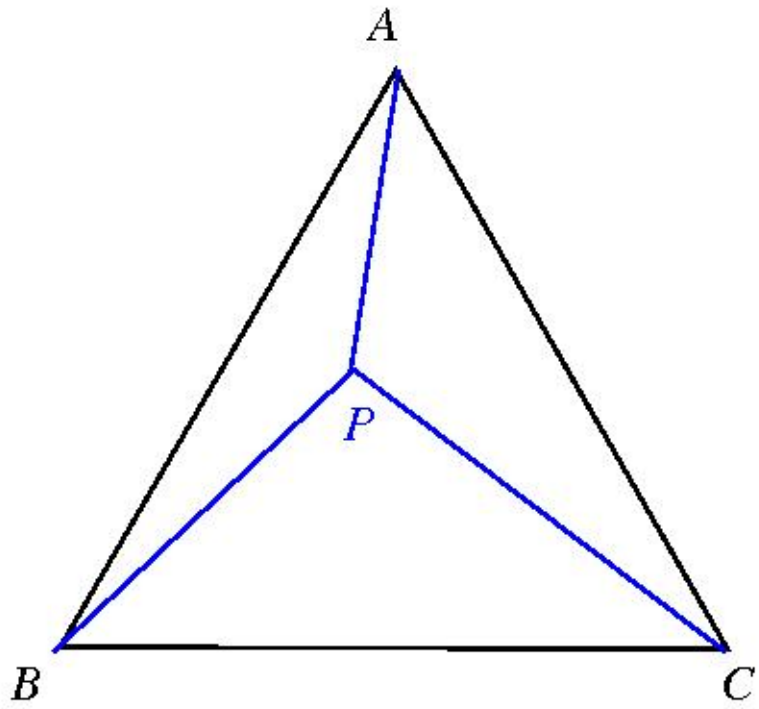
Voltemos a geometria.

Voltemos a geometria.

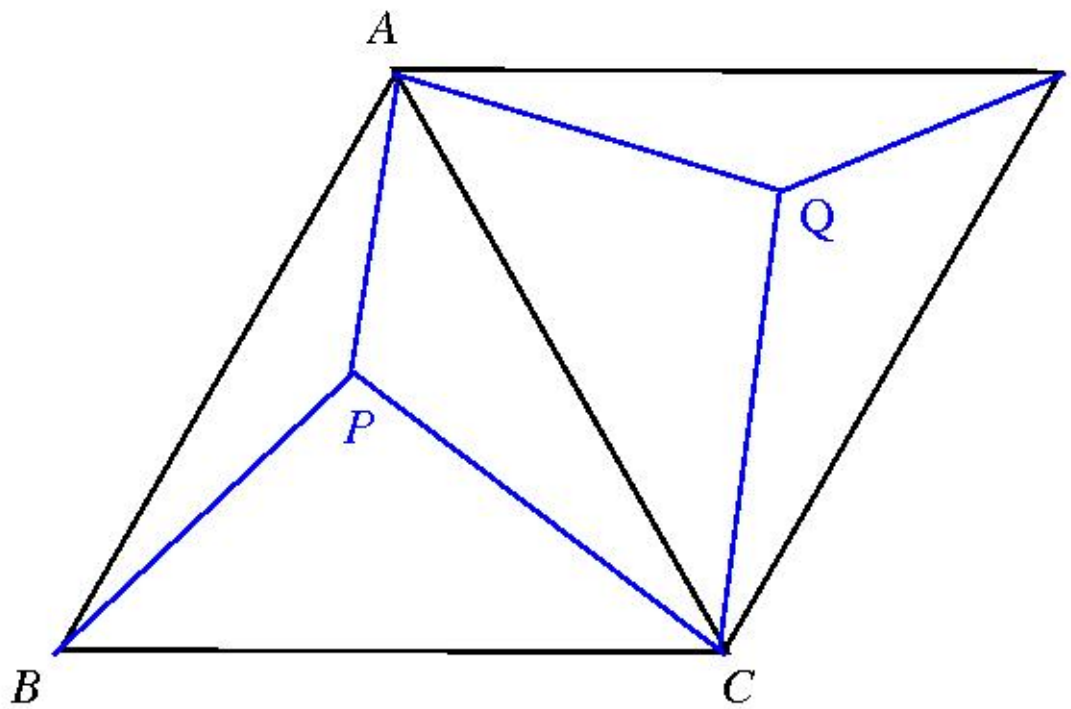
Theorema de Pompeiu *Seja ABC um triângulo equilátero, e seja P um ponto no plano. Então existe um triângulo com lados PA, PB, PC.*



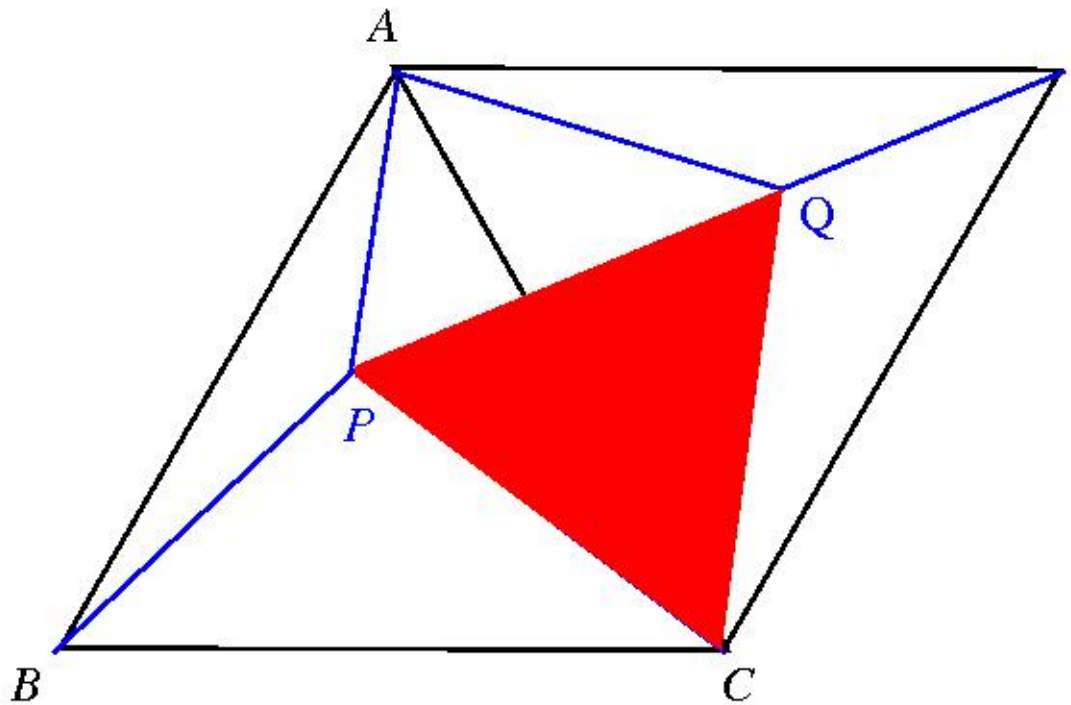
Demonstração:



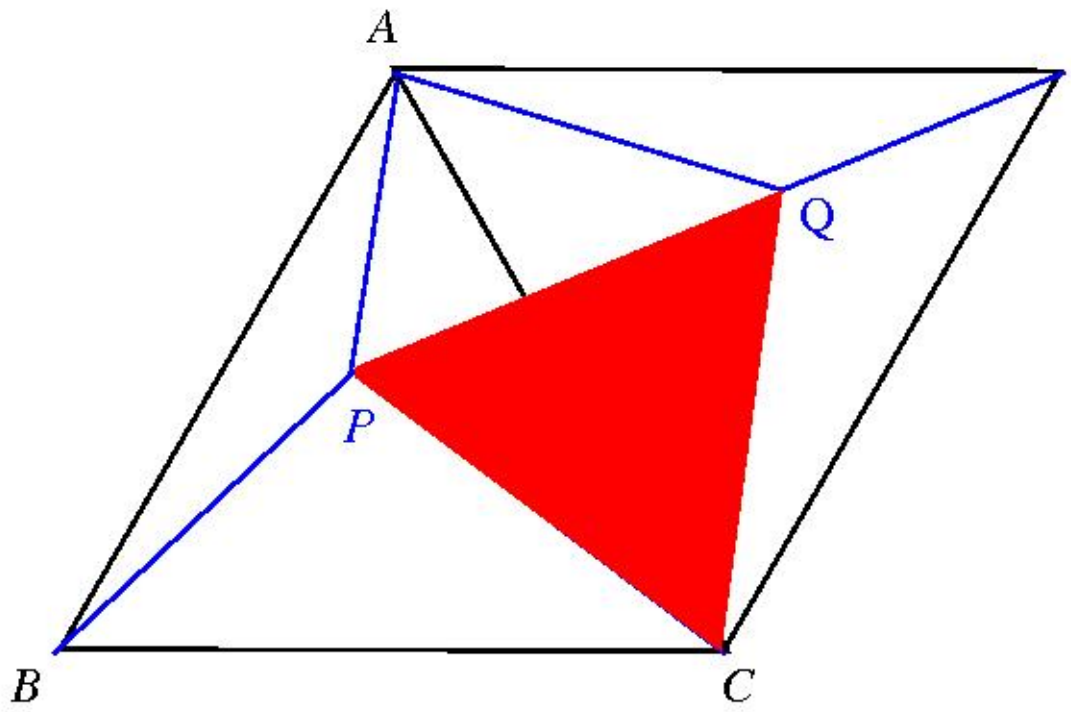
Demonstração: Rodamos o triângulo ABC *em torno de* C *com* $60°$.



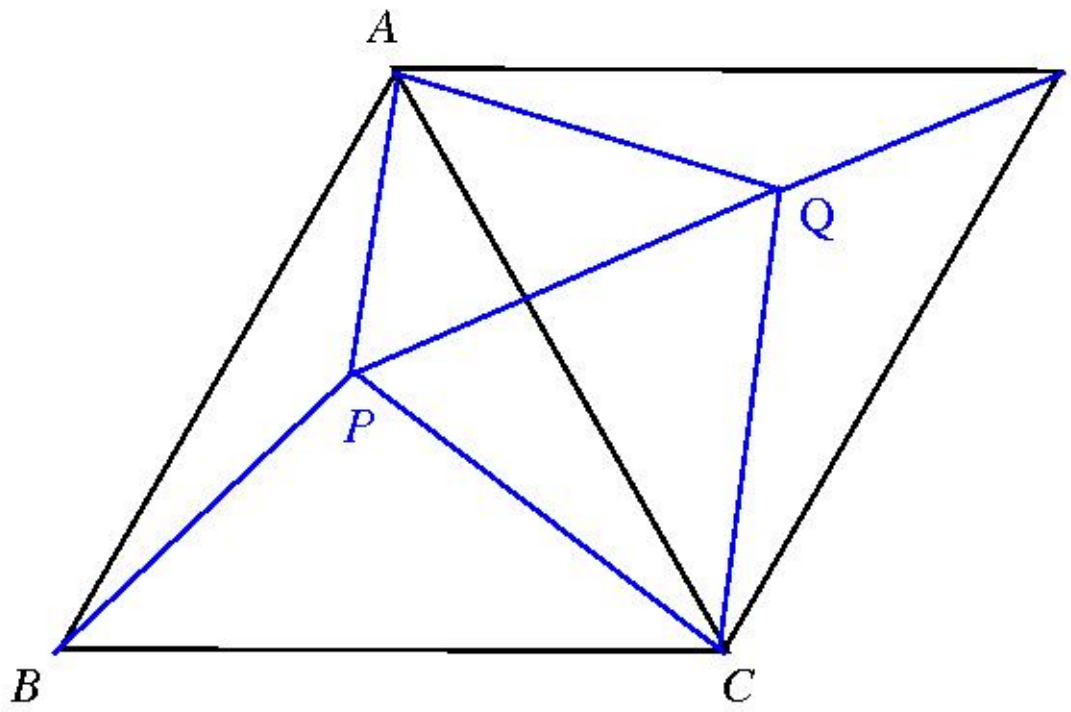
Demonstração: $CP = CQ$, $\angle CPQ = 60^\circ$.



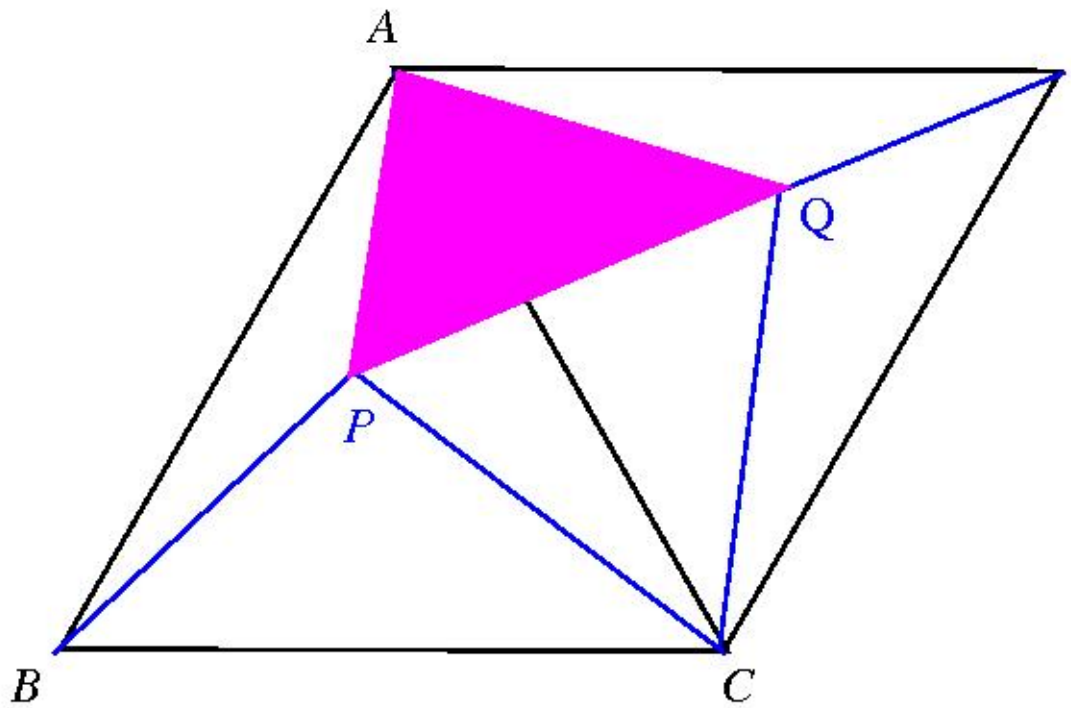
Demonstração: CPQ *é equilátero.*



Demonstração: Olhe o triângulo APQ!



Demonstração: AP, $AQ = BP$, $PQ = CP$.



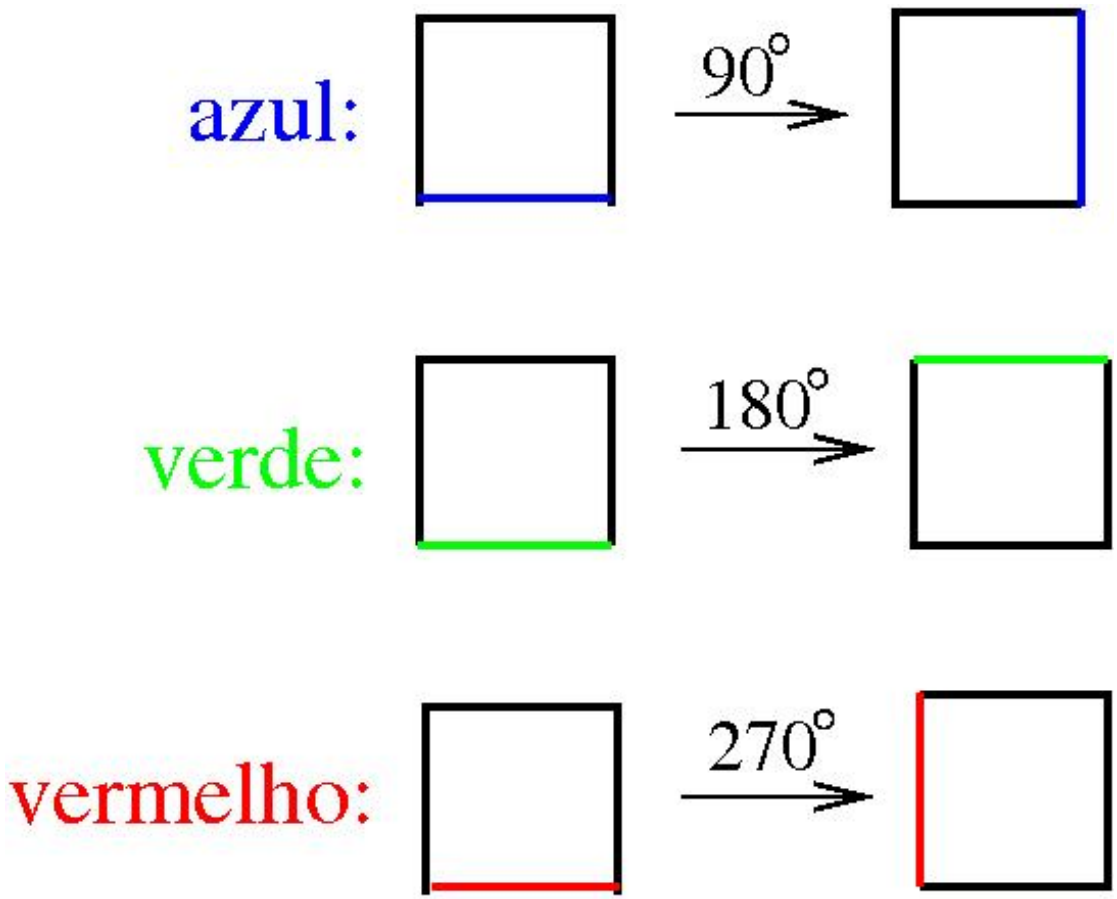
E agora um problema de combinatória, da Olimpiada de Matemática de Bulgária.

Problema *Temos* 2000 *bolas azuis numa caixa. Temos também suficentes bolas azuis, verdes, e vermelhas, inicialmente fora da caixa. Cada vez podemos substituir duas bolas na caixa do seguinte modo:*

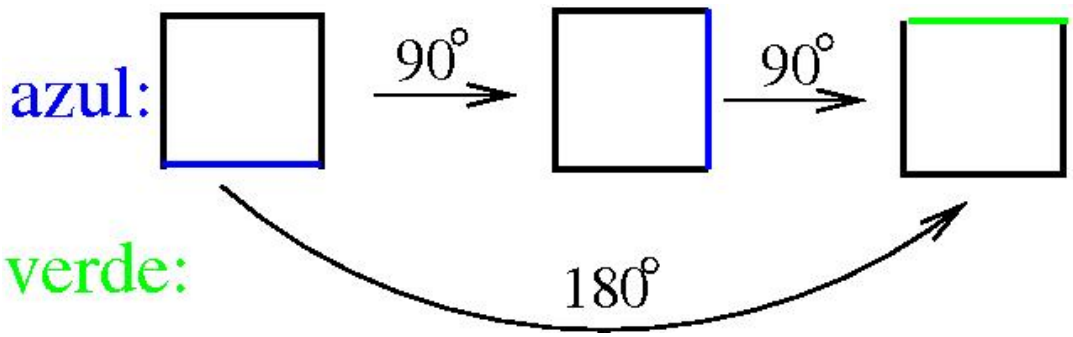
- *duas azuis com uma verde,*
- *duas vermelhas com uma verde,*
- *duas verdes com uma azul e uma vermelha,*
- *uma azul e uma verde com uma vermelha,*
- *uma verde e uma vermelha com uma azul.*

1. *Depois de repetir as operações, ficamos com* 3 *bolas. Demonstrar que uma delas é verde.*
2. *É possível fazer estas operações de tal forma que no fim na caixa reste só uma bola?*

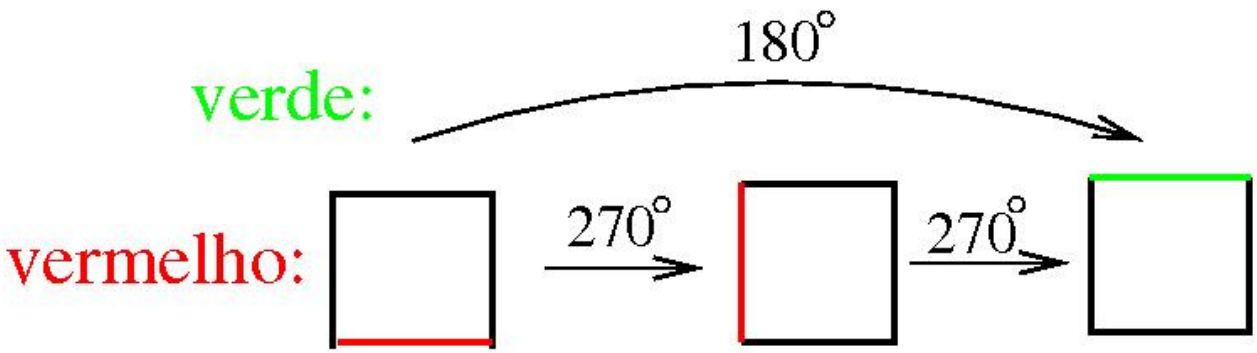
Solução: *Associamos rotações ás bolas:*



Substituir duas bolas azuis com uma verde:



Substituir duas bolas vermelhas com uma verde



etc...

Inicialmente temos uma rotação de $2000 \times 90^\circ$*, que é um múltiplo de* 360°*.*

Inicialmente temos uma rotação de $2000 \times 90^\circ$*, que é um múltiplo de* 360°*.*

1. *Para obter uma rotação o ângulo cujo seja um múltiplo de* 360° *como uma composição de tres rotações de ângulos* 90°*,* 180°*, ou* 270°*, precisa pelo menos uma rotação de* 180°*.*
2. *Nenhum dos ângulos de* 90°*,* 180°*, ou* 270° *é um múltiplo de* 360°*, por isso a resposta é "não".*

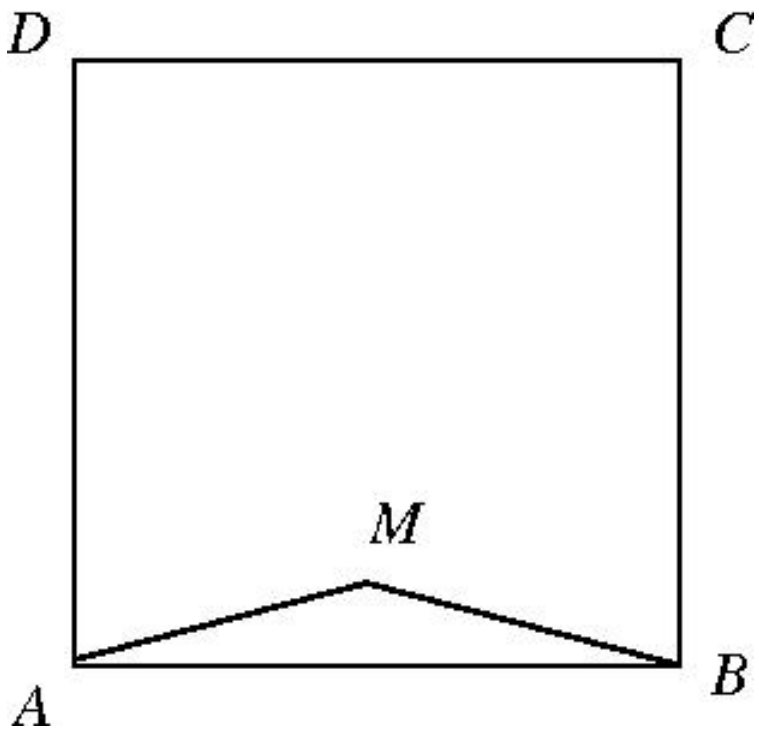
Continuamos com um outro exemplo de geometria.

Continuamos com um outro exemplo de geometria.

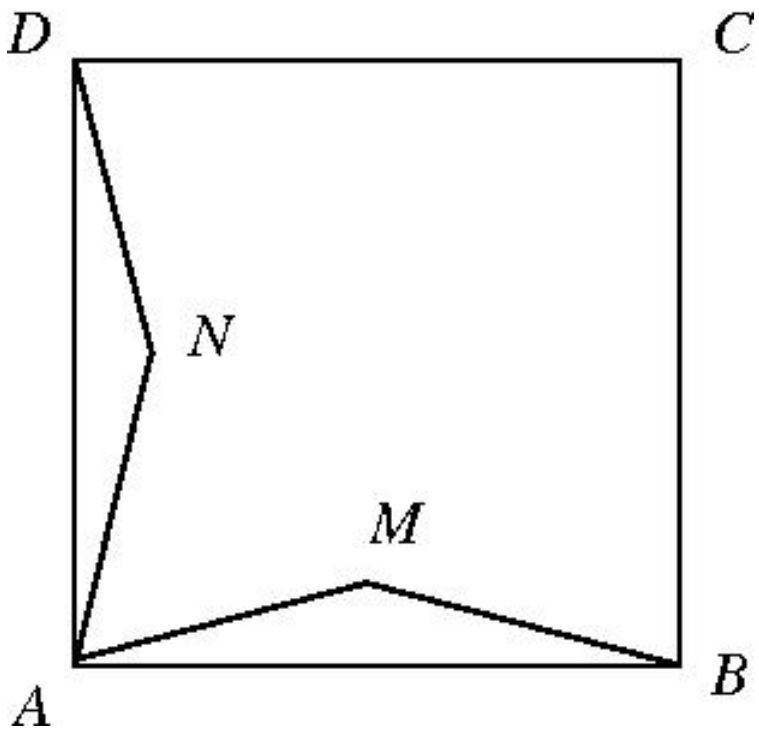
<u>Problema</u> *Seja* $ABCD$ *um quadrado e* M *um ponto no interior do quadrado tal que* $\angle MAB = \angle MBA = 15^\circ$. *Determinar o ângulo* $\angle DMC$.

Continuamos com um outro exemplo de geometria.

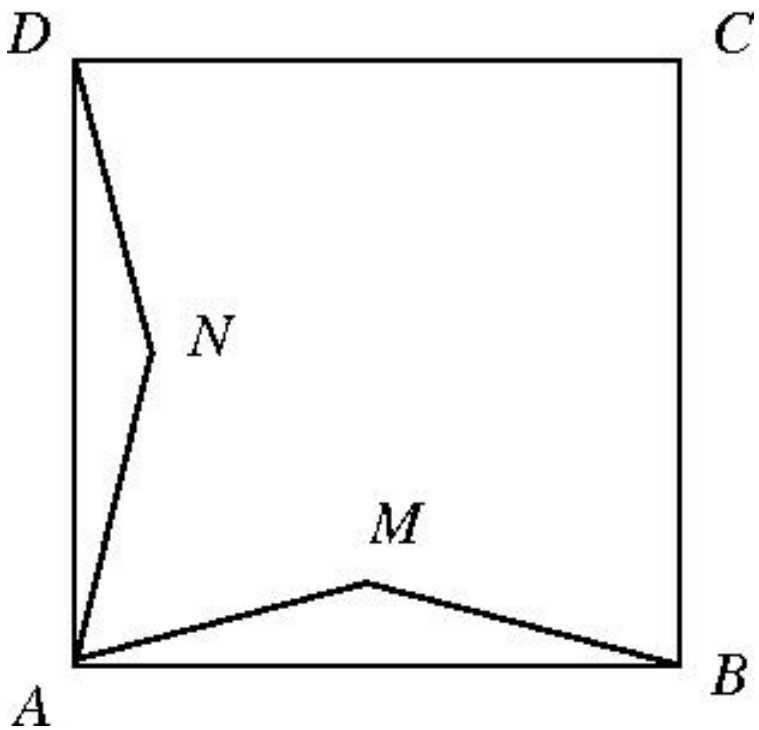
<u>Problema</u> *Seja* $ABCD$ *um quadrado e* M *um ponto no interior do quadrado tal que* $\angle MAB = \angle MBA = 15^\circ$. *Determinar o ângulo* $\angle DMC$.



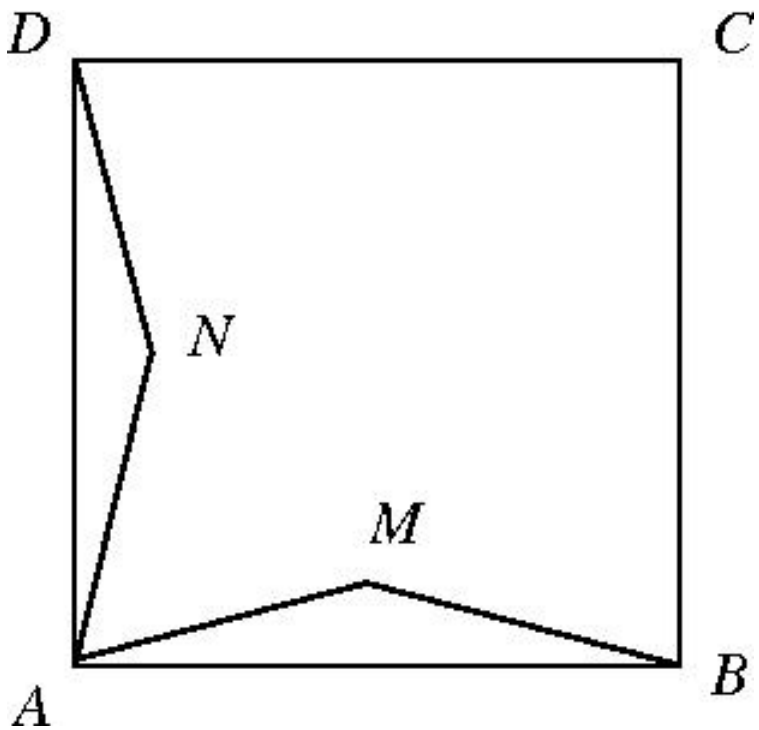
Consideramos a reflexão em torno da reta AC.



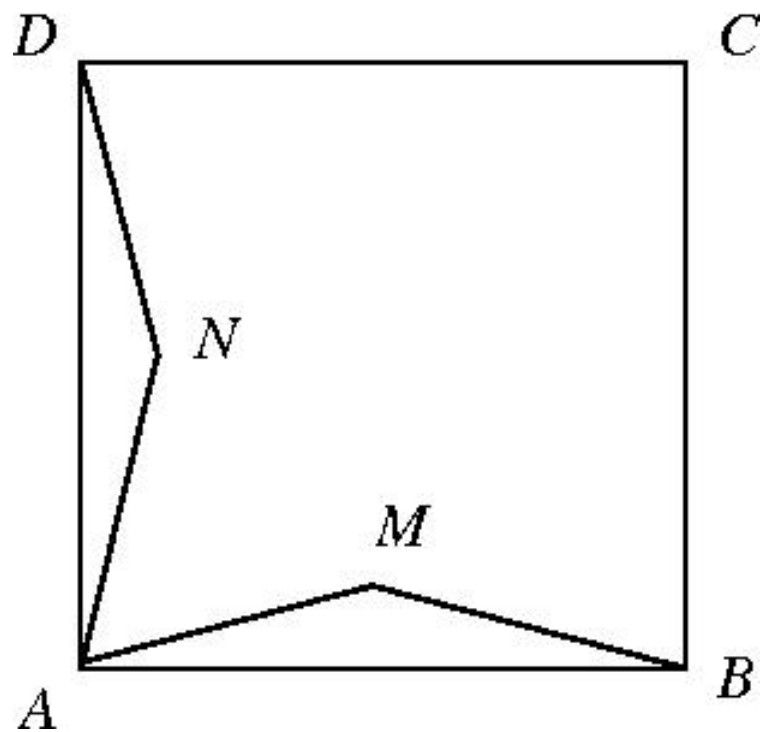
O ponto M transforma-se no ponto N.



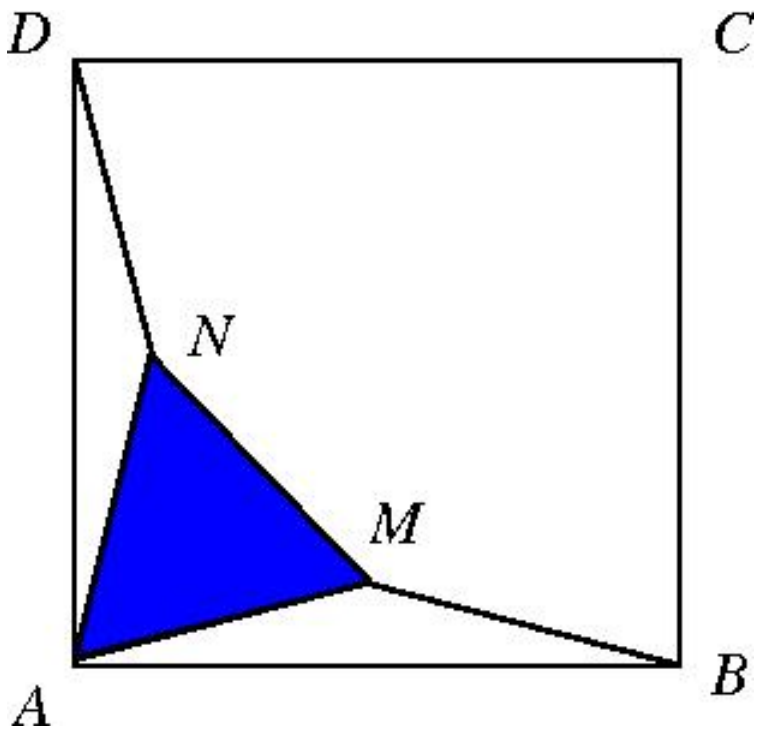
O triângulo AMB transforma-se no triângulo AND.



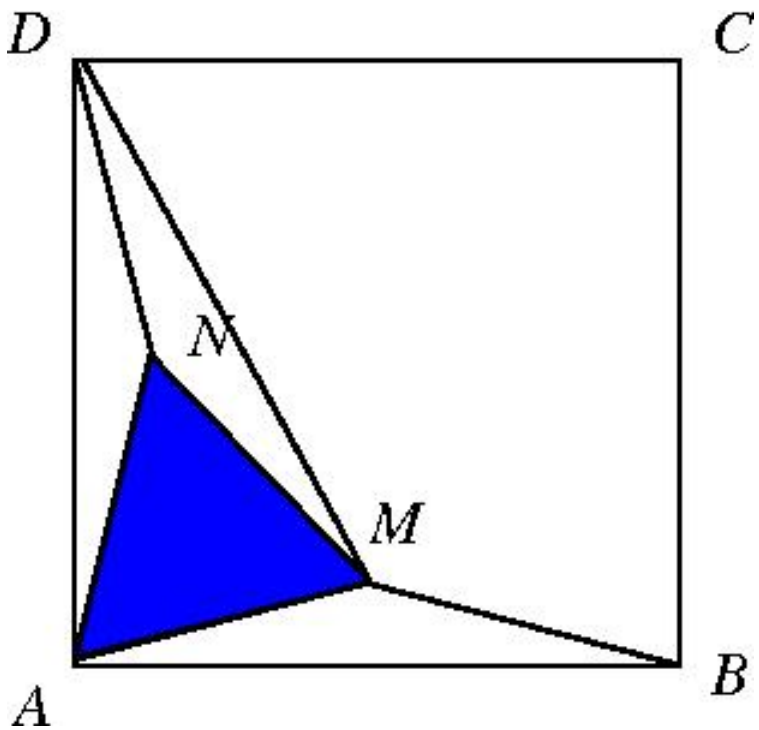
$AM = AN$, $\angle MAN = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ$.



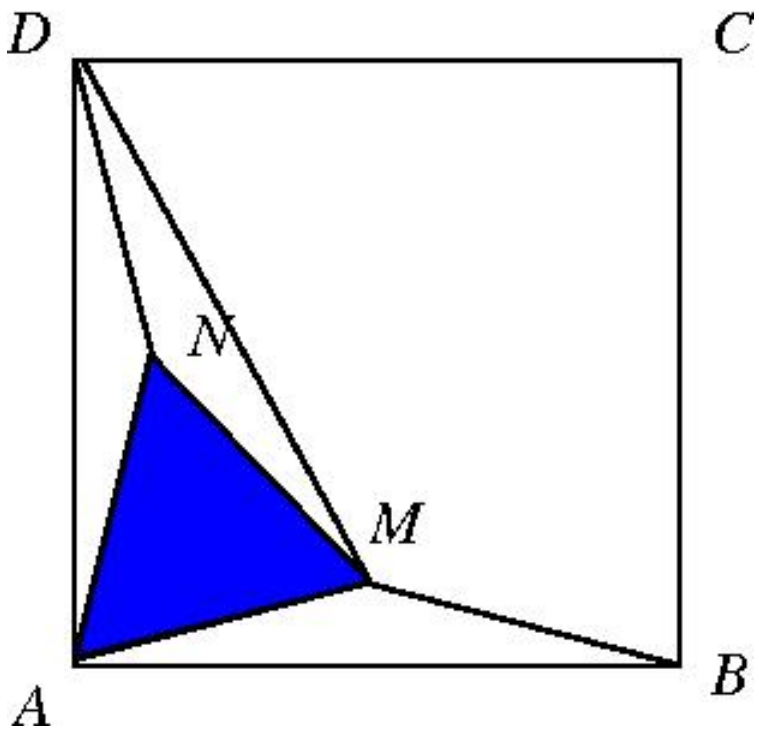
O triângulo AMN é equilátero.



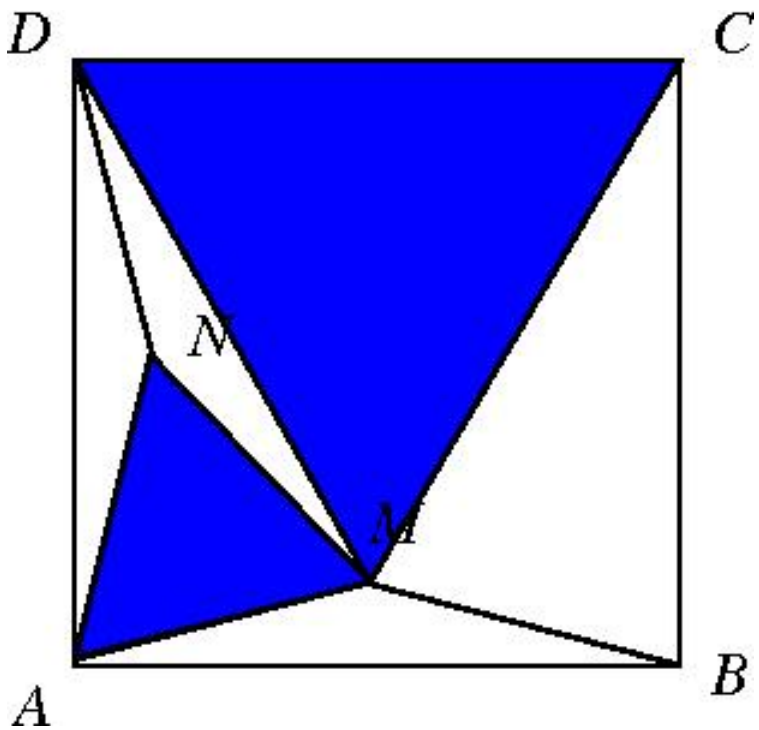
AND *transforma-se em* MND *pela reflexão em torno de* DN.



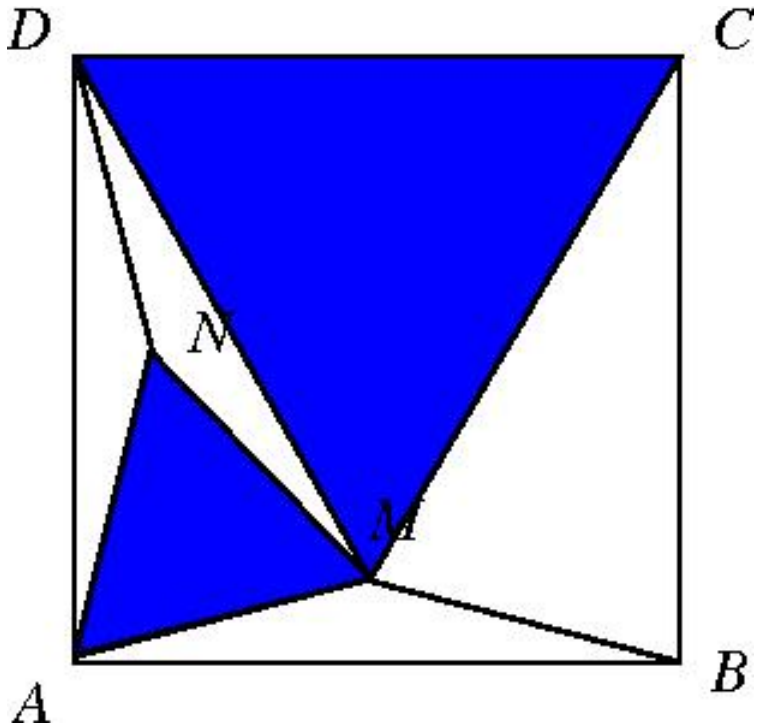
Por isso $AD = MD$.



O triângulo MDC é equilátero.



Resposta: $\angle CMD = 60°$.



E agora de novo, teoría de números.

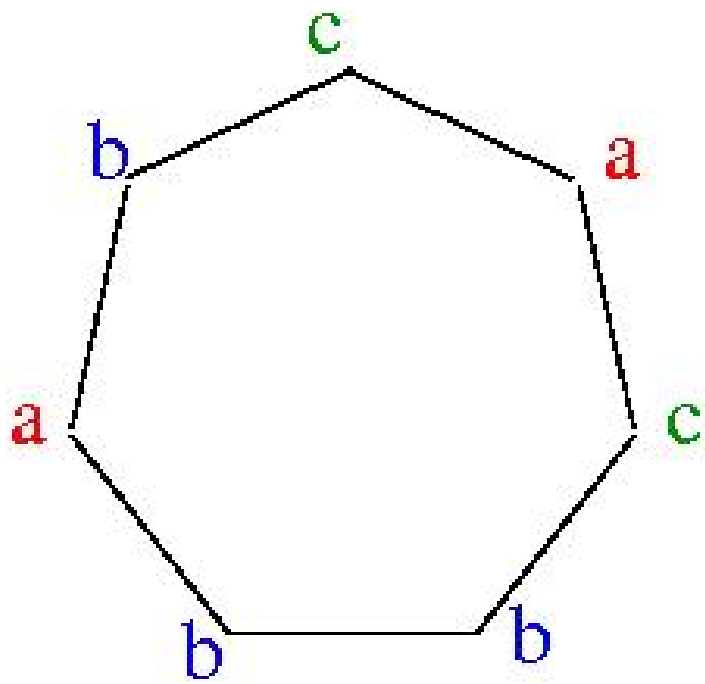
E agora de novo, teoría de números.

Pequeno Teorema de Fermat *Seja p um número primo e n um número inteiro. Então*

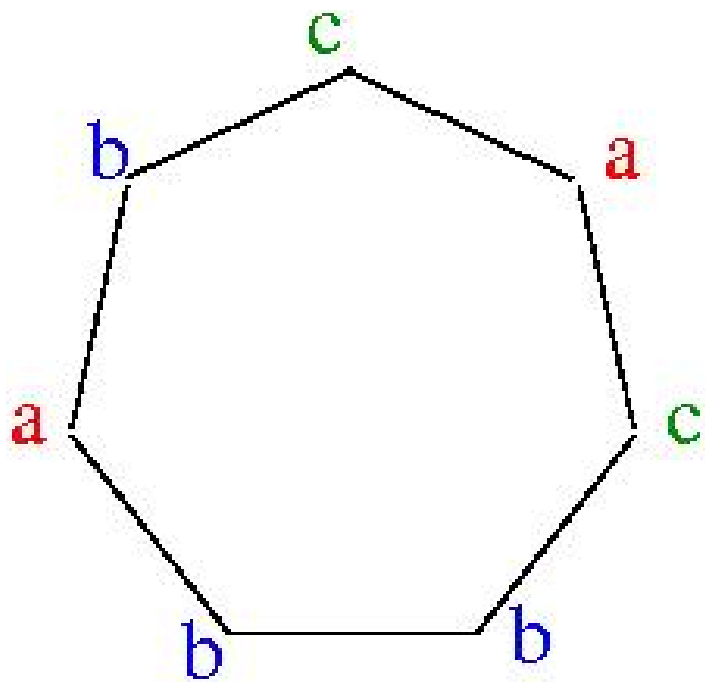
$$n^p - n$$

é divisível por p.

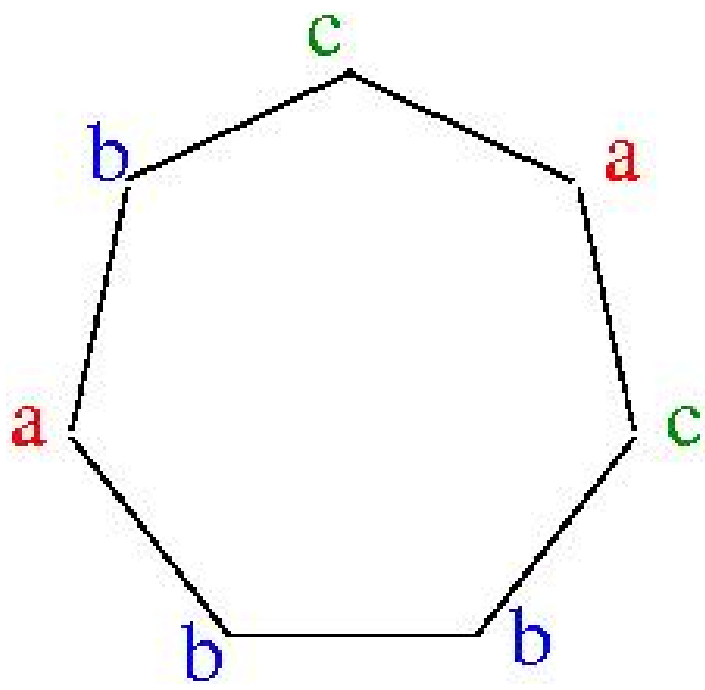
Consideramos um polígono regular com p vértices, e contamos todas as coloraçoes dos vértices com n cores.



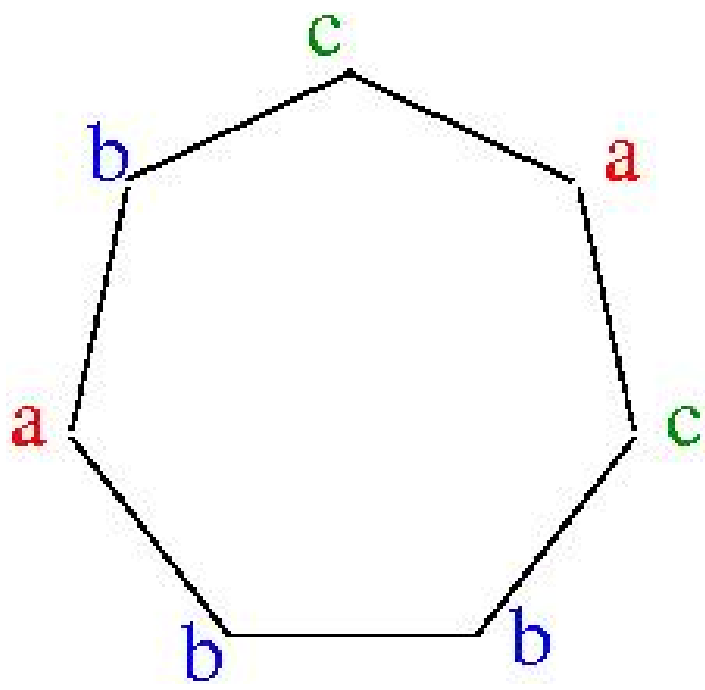
Consideramos um polígono regular com p vértices, e contamos todas as coloraçoes dos vértices com n cores.



Claramente, tem n^p colorações.



Agora imaginamos que os vértices coloridos são as miçangas de um colar. Neste caso, duas colorações que coincidem depois de uma rotação representam o mesmo colar.



Agora imaginamos que os vértices coloridos são as miçangas de um colar. Neste caso, duas colorações que coincidem depois de uma rotação representam o mesmo colar. Vamos contar o número de colares diferentes.

Porque p é um número primo, as únicas colorações que são invariantes a alguma rotação são as colorações com somente uma cor, e temos n delas.

Porque p é um número primo, as únicas colorações que são invariantes a alguma rotação são as colorações com somente uma cor, e temos n delas.

Cada das outras colorações é parte de uma familia de p colorações que correspondem ao mesmo colar.

Porque p é um número primo, as únicas colorações que são invariantes a alguma rotação são as colorações com somente uma cor, e temos n delas.

Cada das outras colorações é parte de uma familia de p colorações que corespondem ao mesmo colar.

Então o número de colares é

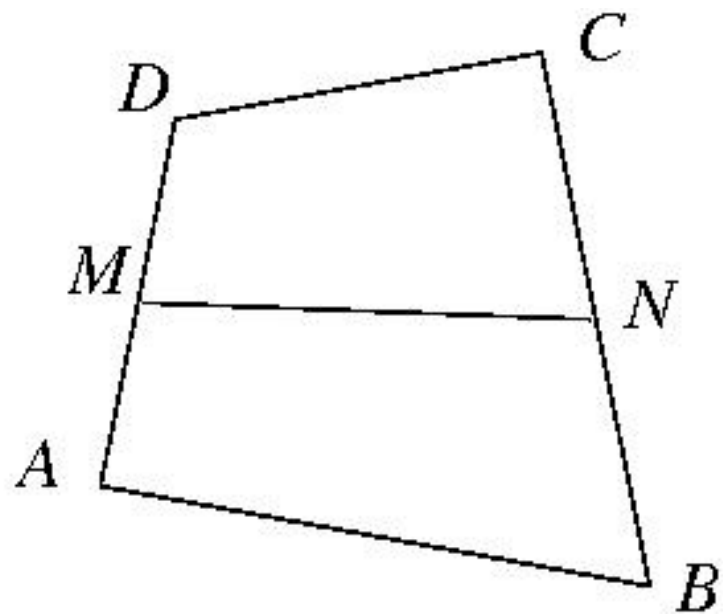
$$n + \frac{n^p - n}{p}.$$

Este é um número inteiro, e por isso $n^p - n$ é divisível por p.

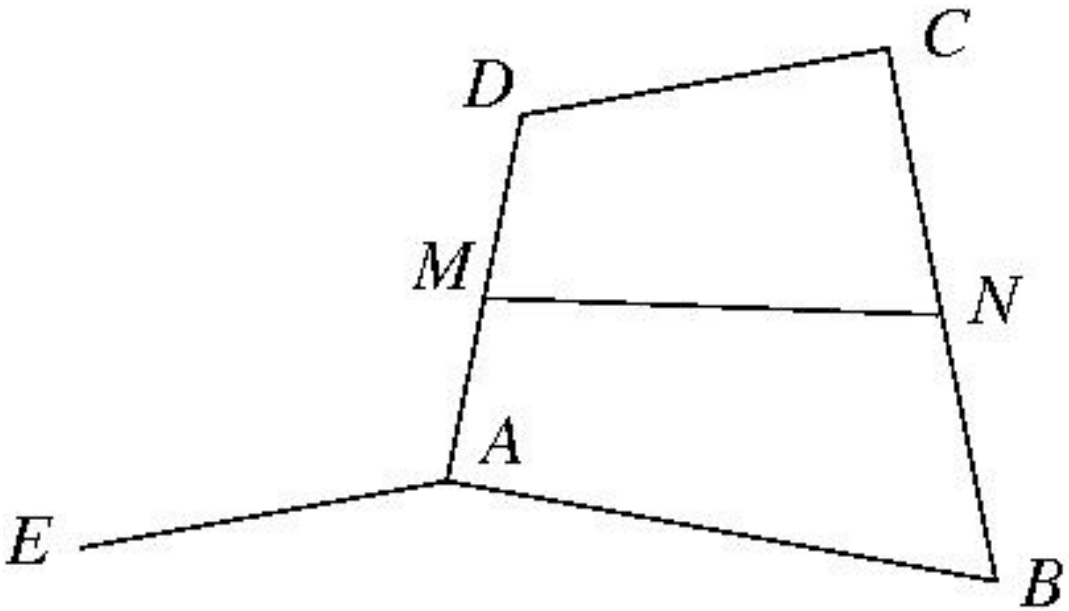
<u>Problema</u> *Seja $ABCD$ um quadrilatero e sejam M e N os pontos médios dos lados AD e BC. Demonstrar que*

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

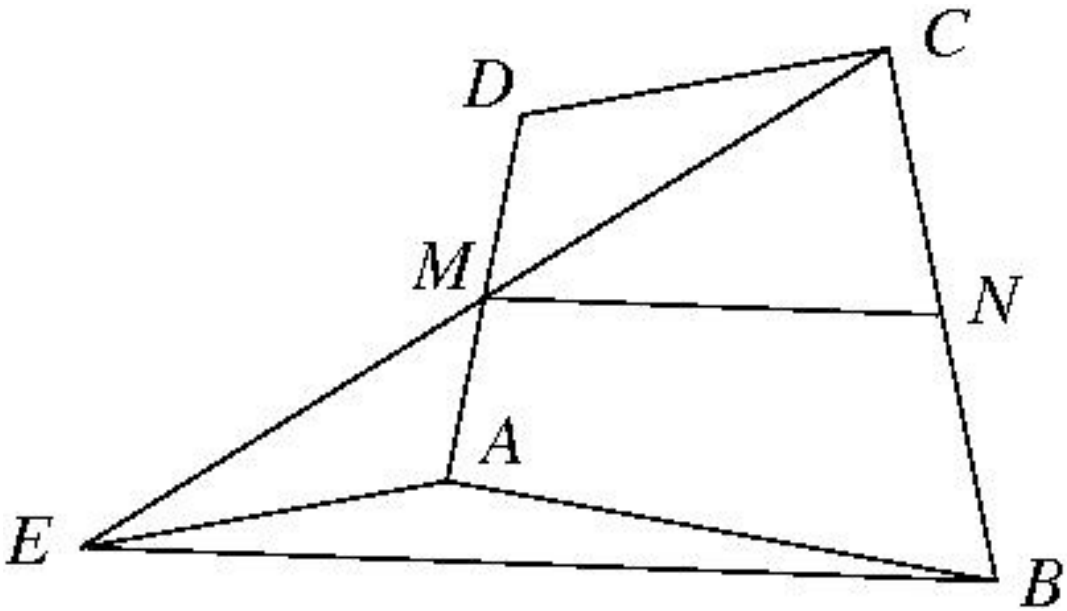
se e só se $ABCD$ é um trapezoidal.



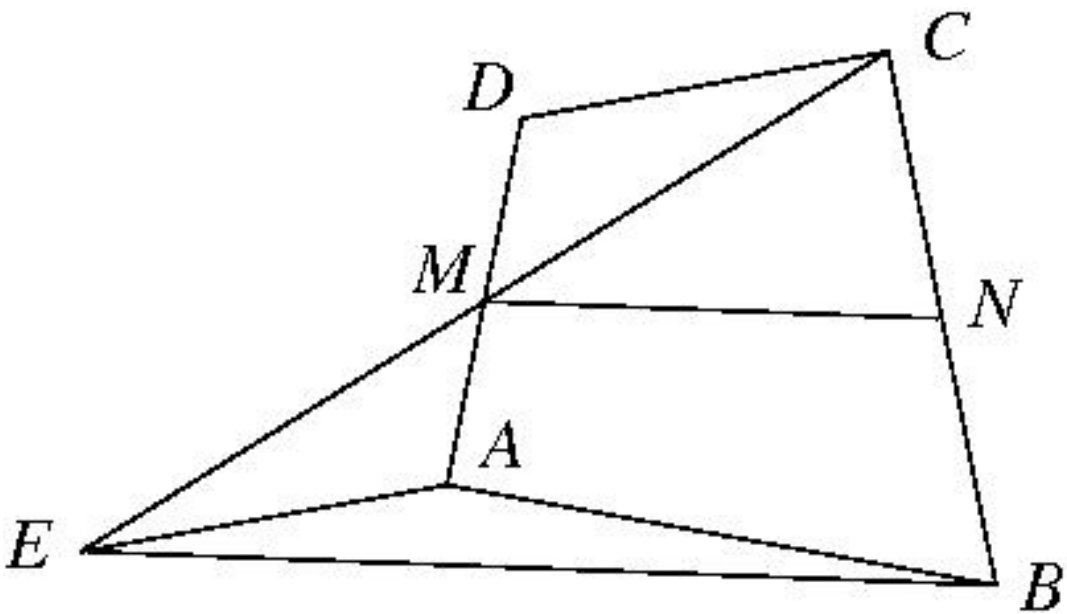
Translatamos CD *em* AE.



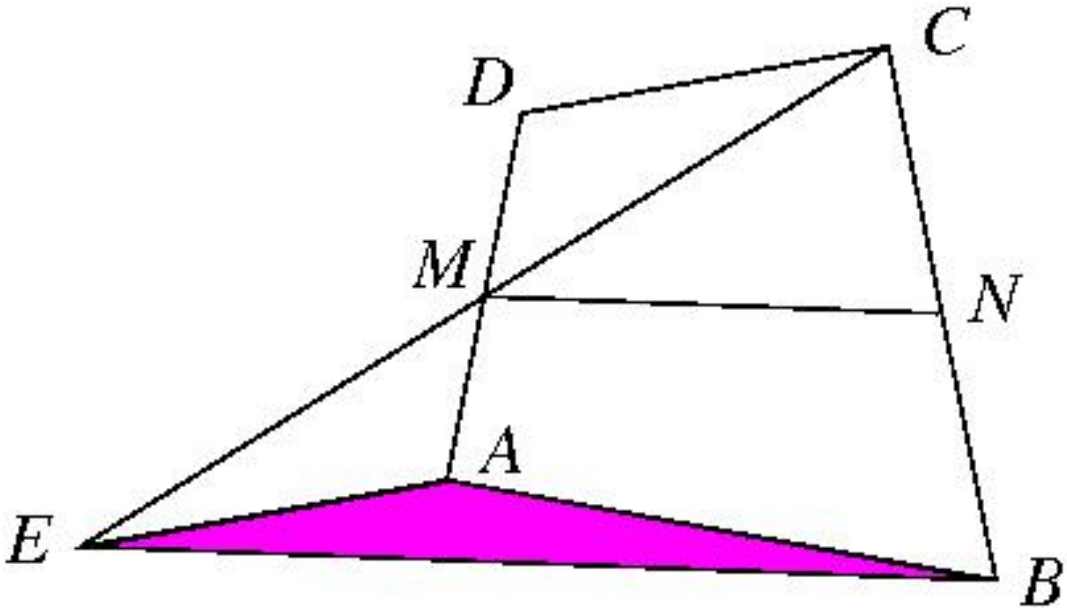
Translatamos CD *em* AE.



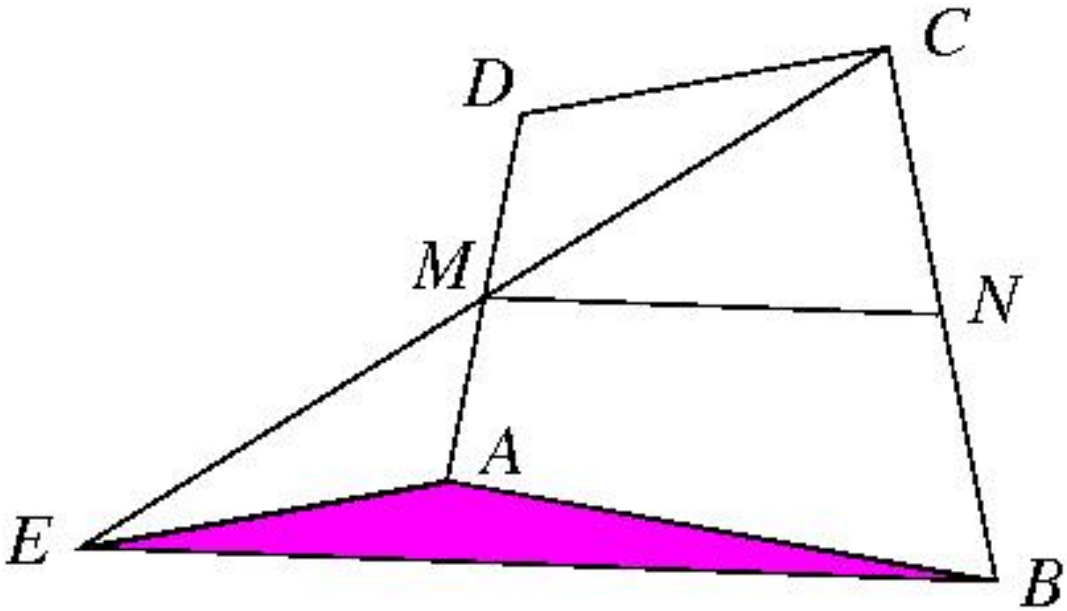
No triângulo CEB, $MN = EB/2$.



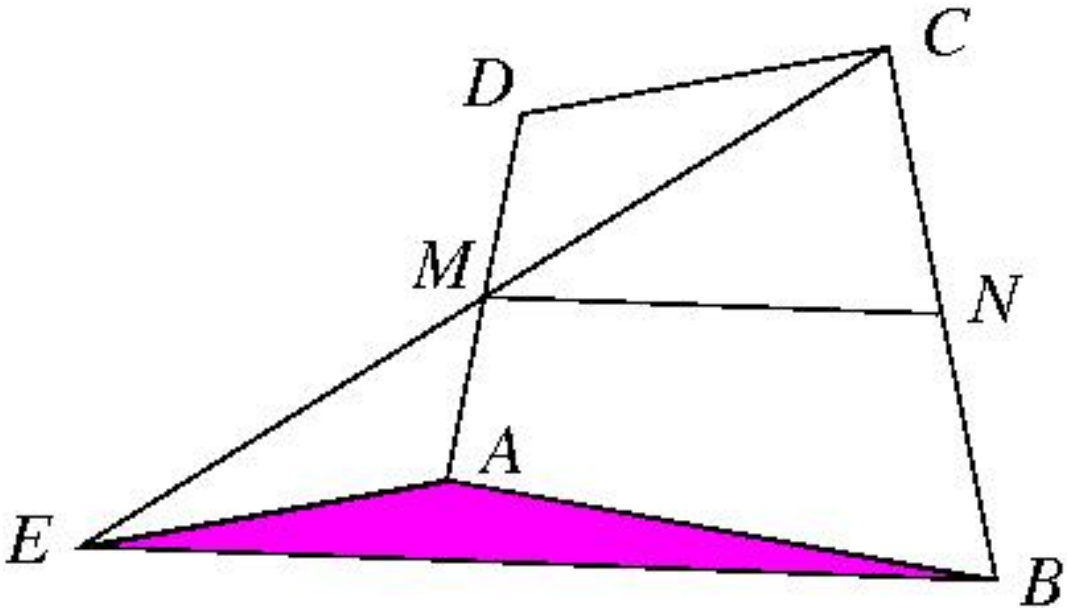
No triângulo AEB, $EB \leq AB + AE$.



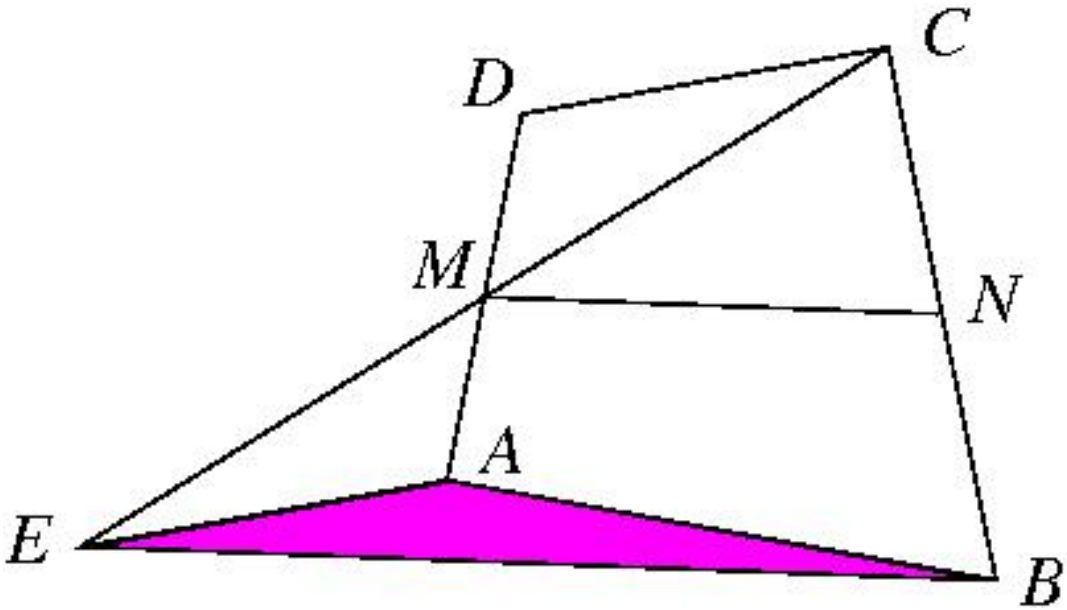
Obtemos $EB \leq AB + CD$.



Por isso, $MN = \frac{1}{2}EB \leq \frac{AB+AE}{2} = \frac{AB+CD}{2}$.

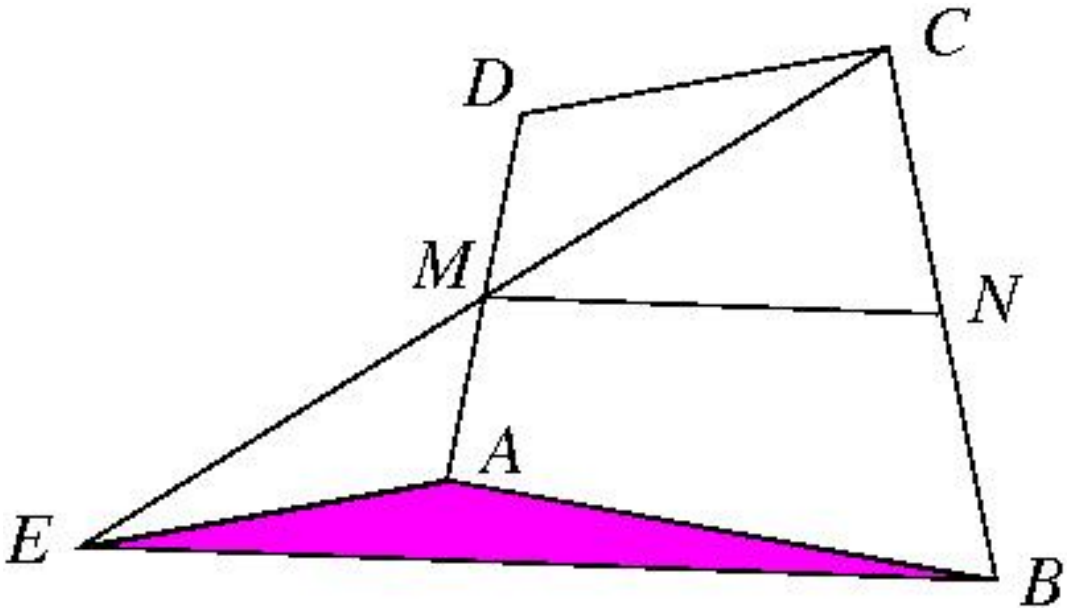


Por isso, $MN = \frac{1}{2}EB \leq \frac{AB+AE}{2} = \frac{AB+CD}{2}$.



Tem igualdade se e só se as retas AB *e* AE *coincidem.*

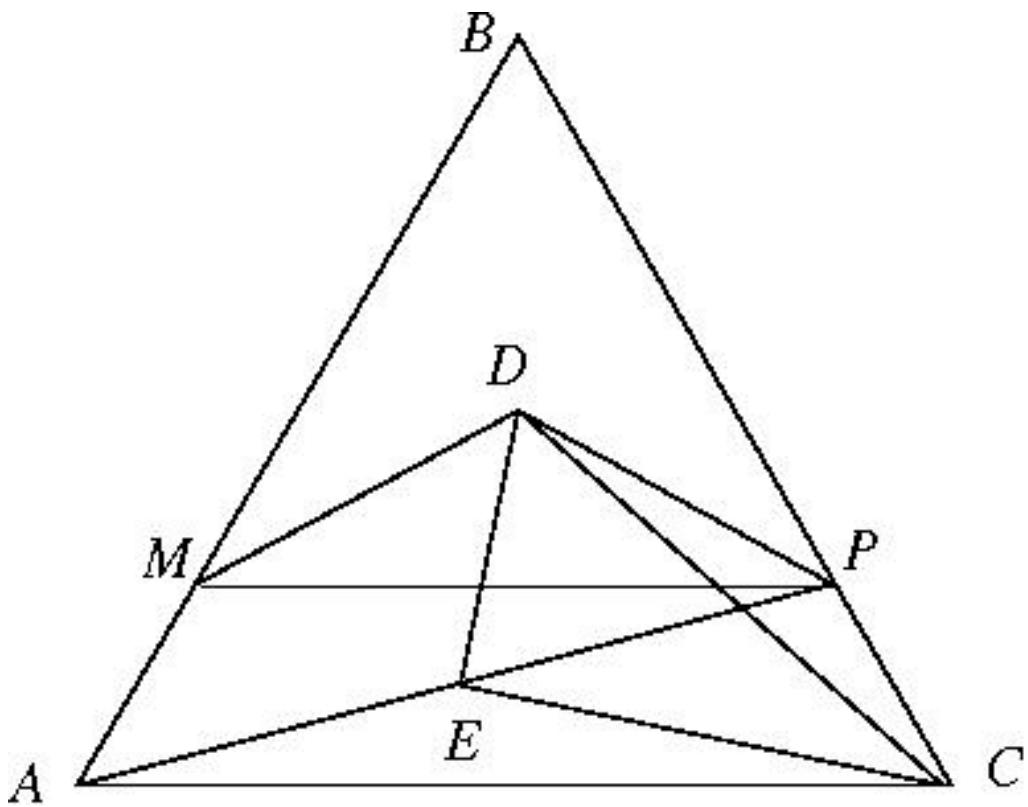
Por isso, $MN = \frac{1}{2}EB \leq \frac{AB+AE}{2} = \frac{AB+CD}{2}$.



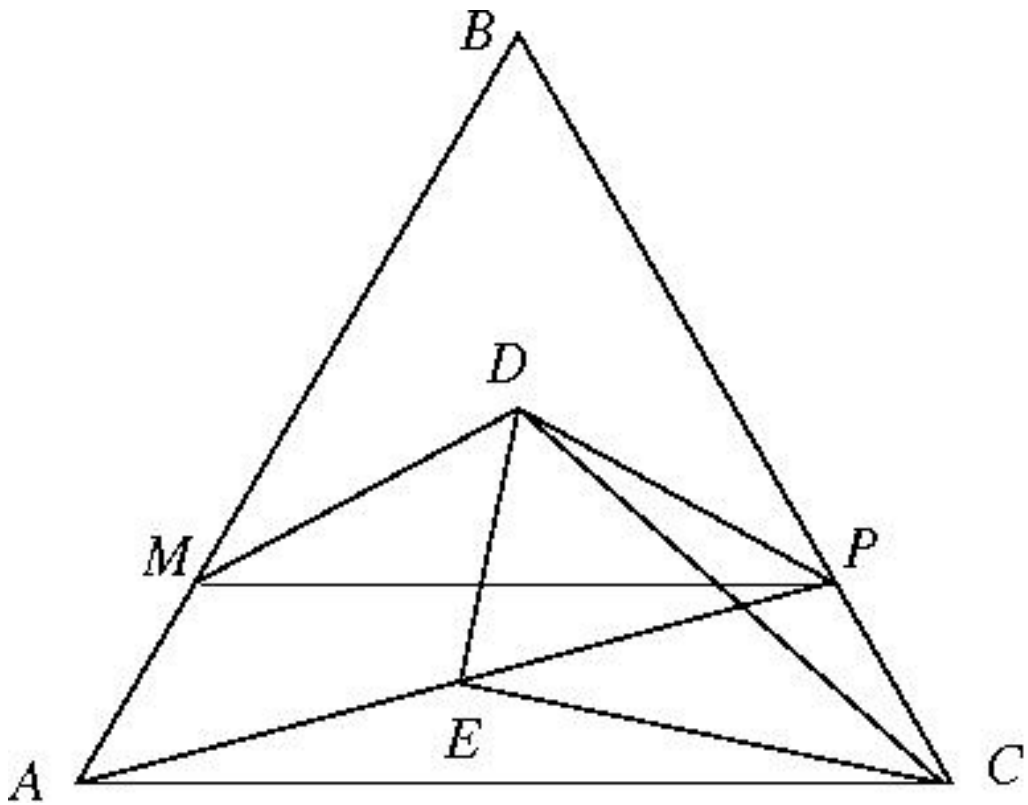
Tem igualdade se e só se $AB||CD$.

<u>Problema</u> *Seja ABC um triângulo equilátero. Uma reta paralela a AC intersecta os lados AB e BC em M e P. Seja D o centro do triângulo BMP e seja E o ponto médio do AP. Calcular os ângulos do triângulo DEC.*

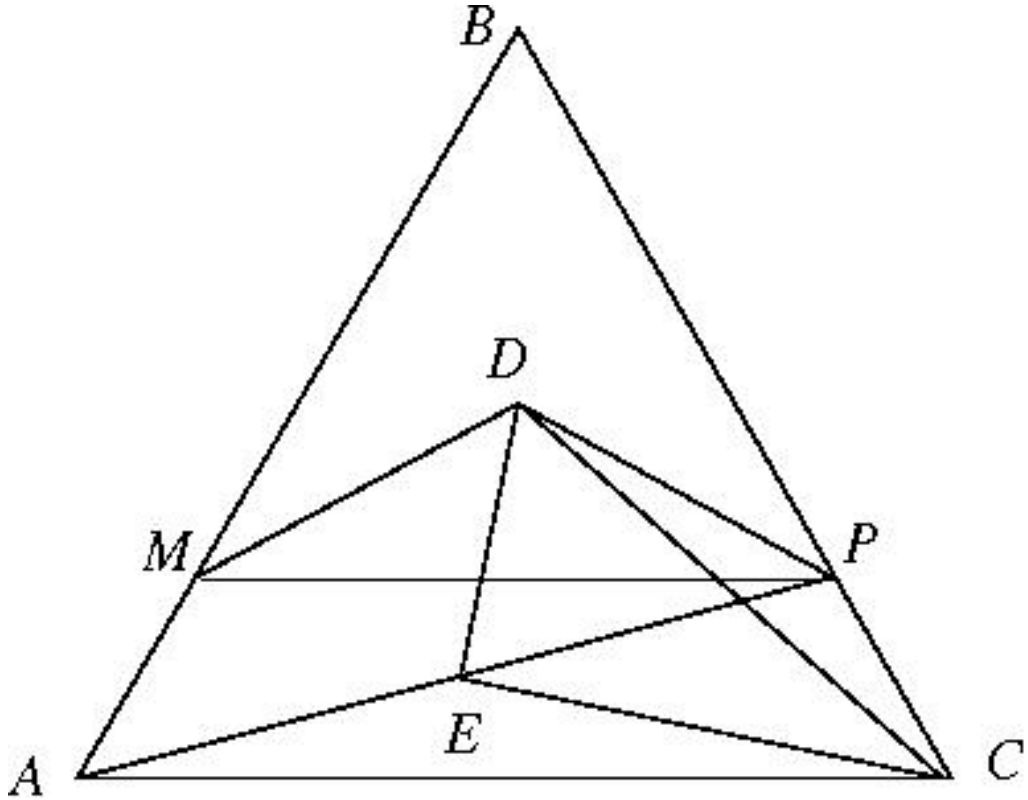
<u>Problema</u> *Seja ABC um triângulo equilátero. Uma reta paralela a AC intersecta os lados AB e BC em M e P. Seja D o centro do triângulo BMP e seja E o ponto médio do AP. Calcular os ângulos do triângulo DEC.*



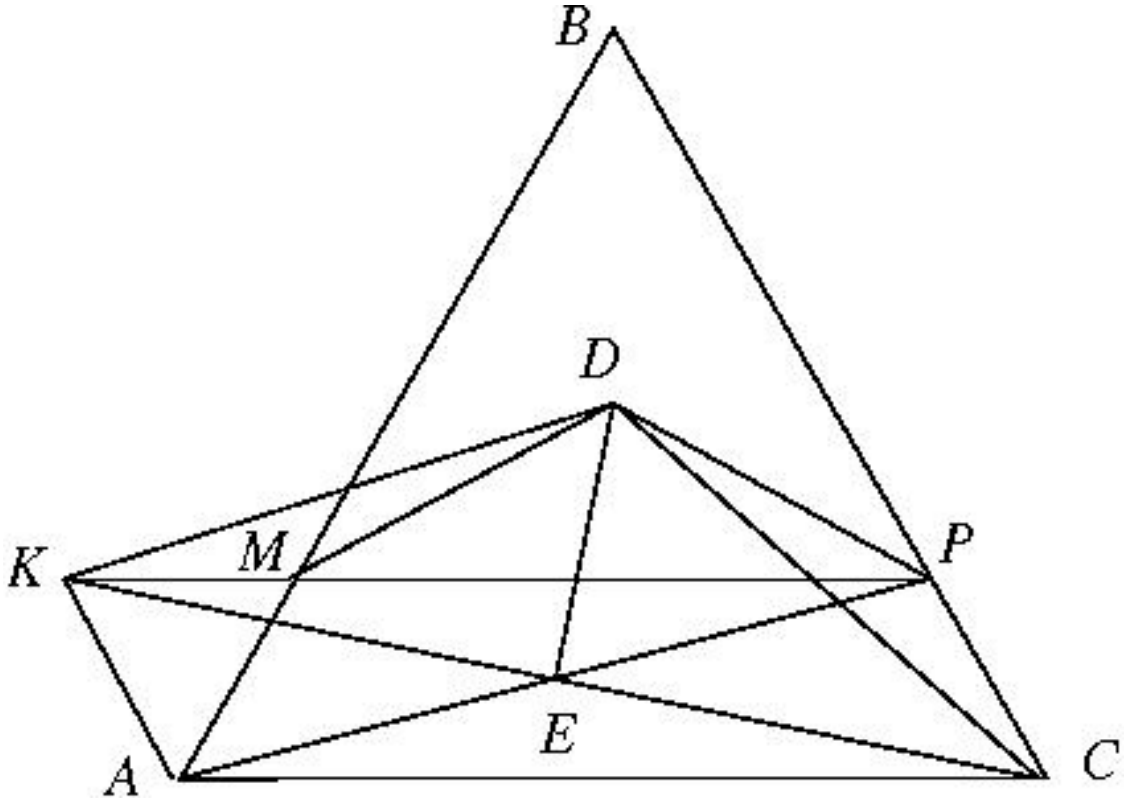
Consideramos a rotação do centro D *e ângulo* 120°.



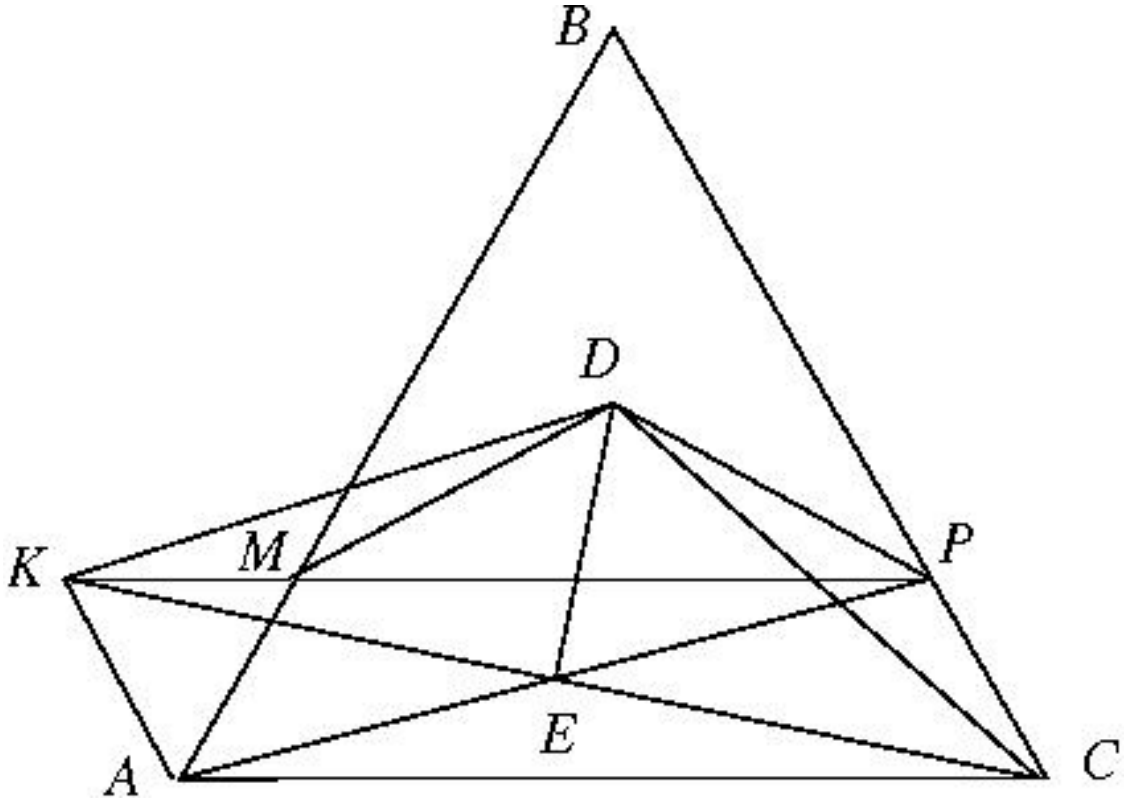
Consideramos a rotação do centro D e ângulo $120°$. O seguimento BP transforma-se em PM, e por isso, P transforma-se em M e C transforma-se num ponto K na reta MP.



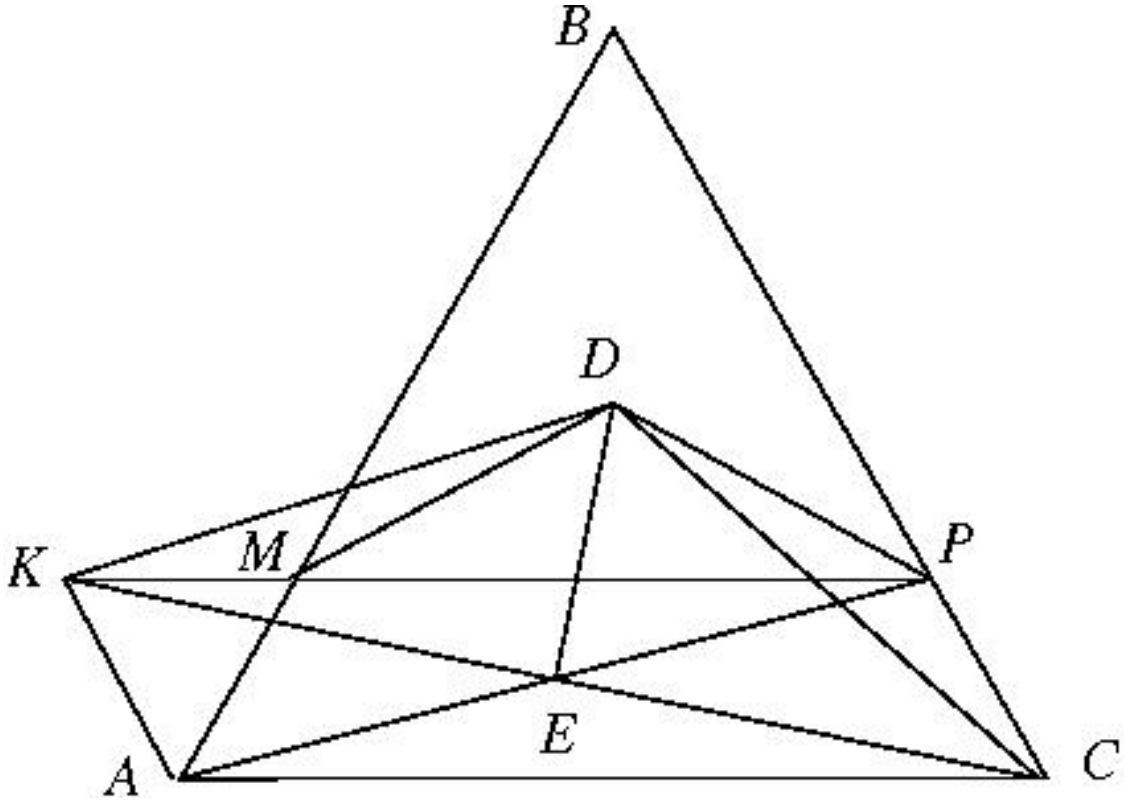
Consideramos a rotação do centro D e ângulo $120°$. O seguimento BP transforma-se em PM, e por isso, P transforma-se em M e C transforma-se num ponto K na reta MP.



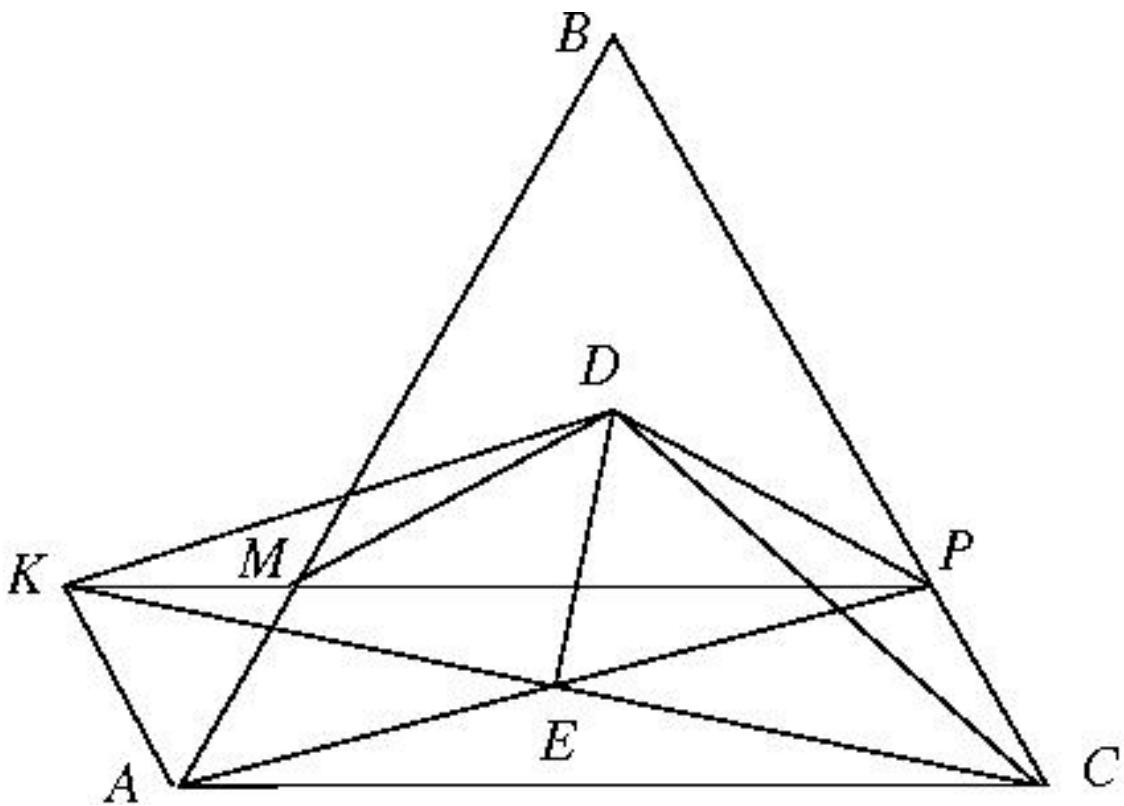
Porque $MK = CP = AM$ *e* $\angle KMA = 60^\circ$*, o triângulo* AKM *é equilátero.*



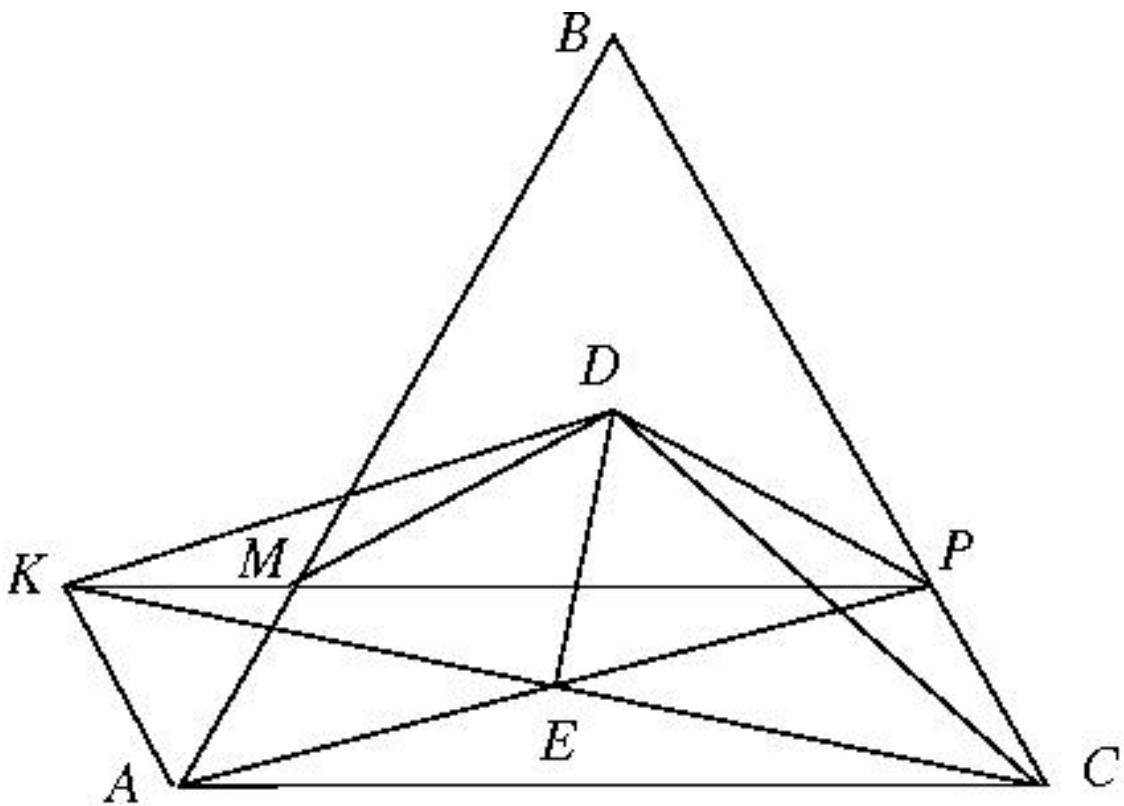
Porque $MK = CP = AM$ *e* $\angle KMA = 60^\circ$*, o triângulo* AKM *é equilátero. Por isso* $AK||CP$*. Obtemos que* $AKPC$ *é um paralelograma com centro* E*.*



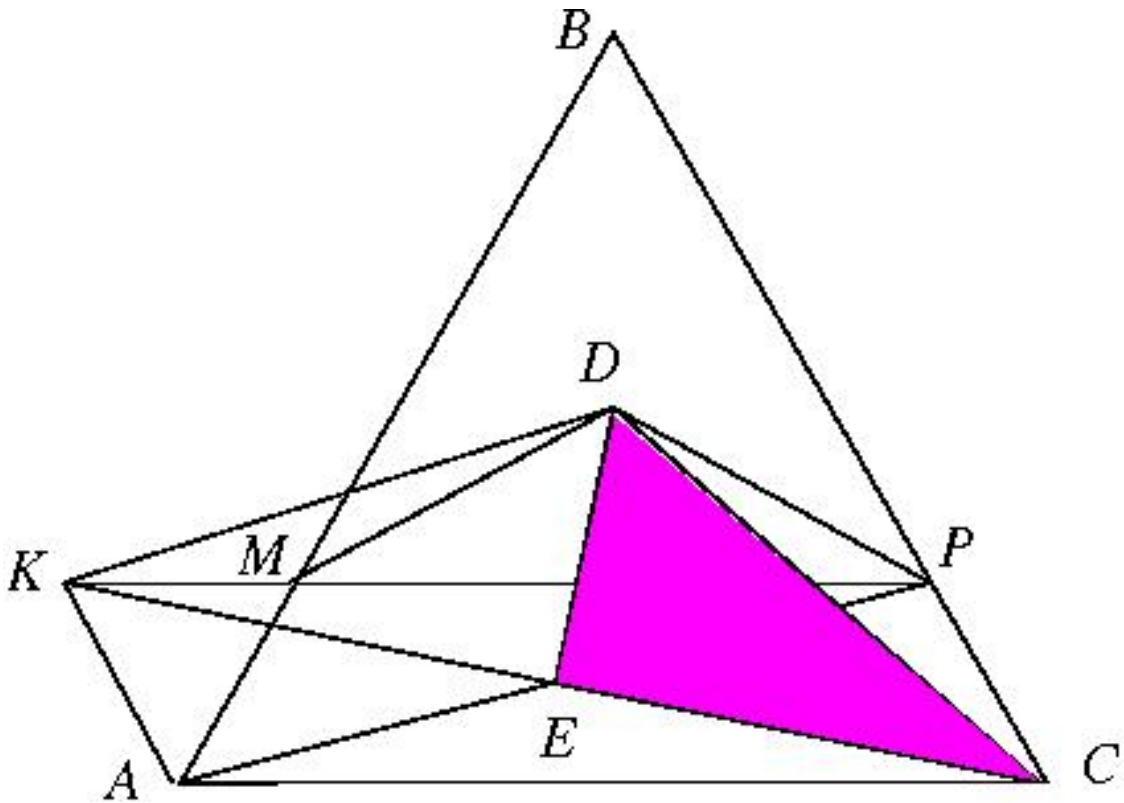
Então E é o ponto médio do seguimento CK,



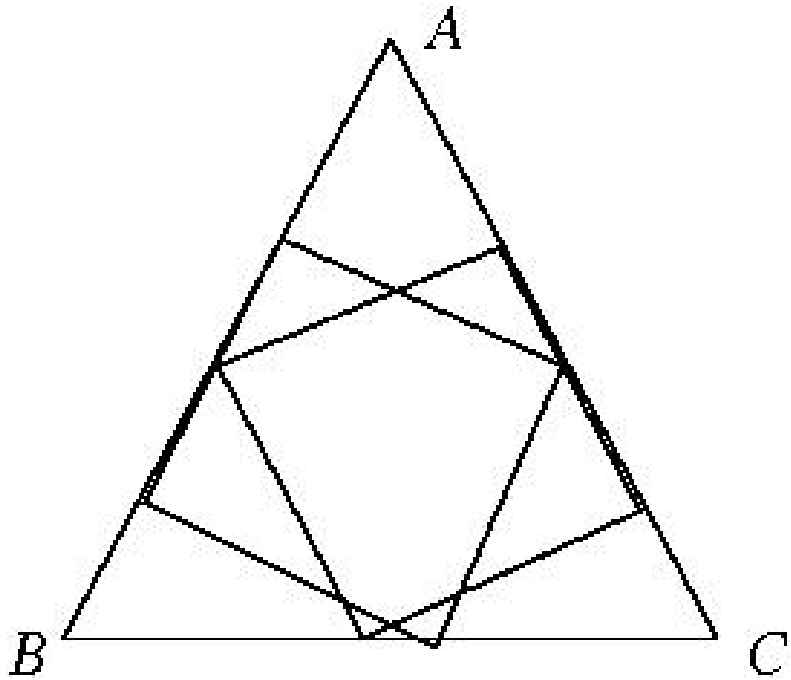
Então E é o ponto médio do seguimento CK, e por isso $DE \perp CK$.

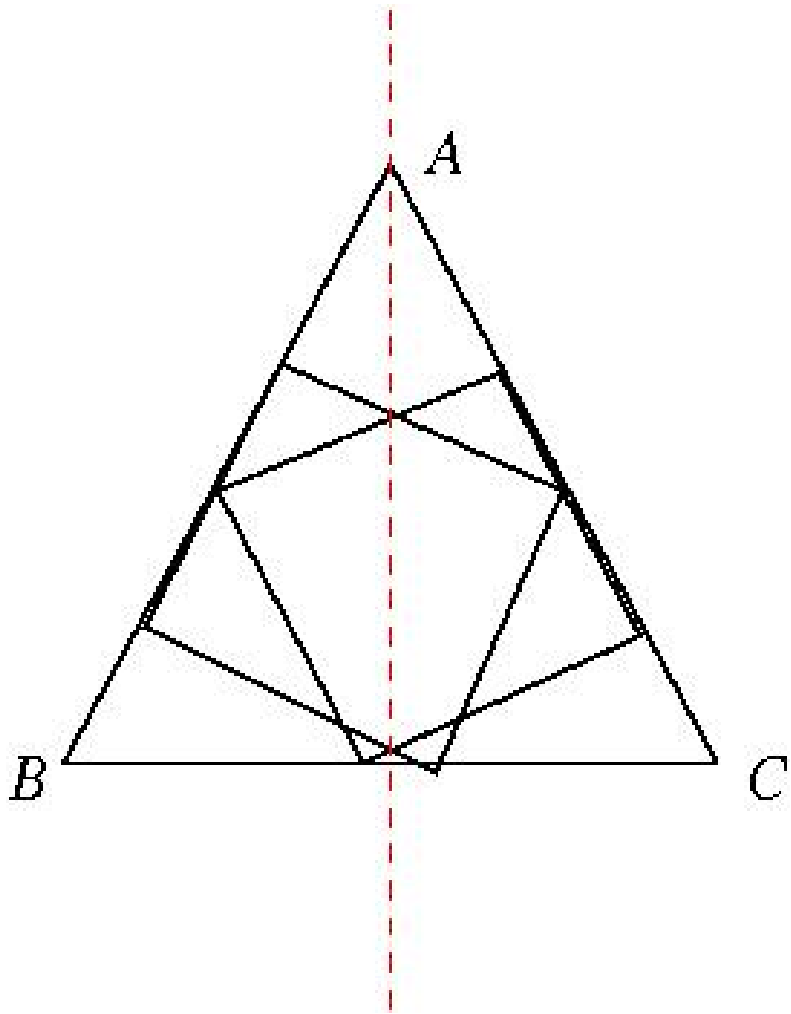


Então E *é o ponto médio do seguimento* CK*, e por isso* $DE \perp CK$*.*
Concluímos que EDC *é um triângulo* $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$*.*



Problema *Demonstrar que se é possível inscrever tres quadrados iguais num triângulo, então o triângulo e equilátero.*


A
B
C


A
B
C