DETERMINANTES

Răzvan Gelca

(Fortaleza, Brasil)

Problema *Sejam* a *e* b *dois números inteiros que satisfazem* $a+b=2014$. *Demonstrar que o determinante*

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & 3ab & -1 \\ -1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ 2b & -1 & a^2 & -b^2 \\ 0 & b & -1 & a \end{vmatrix}$$

é um múltiplo de 61.

Problema *Sejam* a *e* b *dois números inteiros que satisfazem* $a + b = 2014$. *Demonstrar que o determinante*

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & 3ab & -1 \\ -1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ 2b & -1 & a^2 & -b^2 \\ 0 & b & -1 & a \end{vmatrix}$$

é um múltiplo de 61.

(R. Gelca, Konhauser Problem Fest, 2014)

Para resolver o problema, somarmos a segunda, terça e quarta coluna á primeira

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & 3ab & -1 \\ -1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ 2b & -1 & a^2 & -b^2 \\ 0 & b & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3+b^3+3ab-1 & b^3 & 3ab & -1 \\ a^2+b^2+2ab-1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ a^2-b^2+2b-1 & -1 & a^2 & -b^2 \\ a+b-1 & b & -1 & a \end{vmatrix}.$$

Para resolver o problema, somarmos a segunda, terça e quarta coluna á primeira

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & 3ab & -1 \\ -1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ 2b & -1 & a^2 & -b^2 \\ 0 & b & -1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3+b^3+3ab-1 & b^3 & 3ab & -1 \\ a^2+b^2+2ab-1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ a^2-b^2+2b-1 & -1 & a^2 & -b^2 \\ a+b-1 & b & -1 & a \end{vmatrix}.$$

É suficiente demonstrar o que os números

$$a^3+b^3+3ab-1$$

$$a^2+b^2+2ab-1$$

$$a^2-b^2+2b-1$$

$$a+b-1$$

são divisíveis por 61.

Os números

$$\begin{array}{rl} & a^3 + b^3 + 3ab - 1 \\ & a^2 + b^2 + 2ab - 1 \\ & a^2 - b^2 + 2b - 1 \\ \longrightarrow & a + b - 1 \end{array}$$

são divisíveis por 61.

$$a + b - 1 = 2013 = 33 \times 61.$$

Os números

$$\begin{array}{rl} & a^3 + b^3 + 3ab - 1 \\ & a^2 + b^2 + 2ab - 1 \\ \longrightarrow & a^2 - b^2 + 2b - 1 \\ & a + b - 1 \end{array}$$

são divisíveis por 61.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2b - 1 &= a^2 - (b-1)^2 \\ &= (a+b-1)(a-b+1) = 61 \times 33 \times (a-b+1). \end{aligned}$$

Os números

$$
\begin{array}{rl}
 & a^3 + b^3 + 3ab - 1 \\
\longrightarrow & a^2 + b^2 + 2ab - 1 \\
 & a^2 - b^2 + 2b - 1 \\
 & a + b - 1
\end{array}
$$

são divisíveis por 61.

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + 2ab - 1 = (a+b)^2 - 1 &= (a+b-1)(a+b+1) \\
&= 61 \times 33 \times (a+b+1).
\end{aligned}
$$

Os números

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad & a^3 + b^3 + 3ab - 1 \\ & a^2 + b^2 + 2ab - 1 \\ & a^2 - b^2 + 2b - 1 \\ & a + b - 1 \end{aligned}$$

são divisíveis por 61.

$$a^3 + b^3 + 3ab - 1 = 61 \times ???.$$

$$a^3 + b^3 + 3ab - 1$$

$$a^3 + b^3 + 3ab - 1$$

Vamos denotar $c = -1$ *para transformar esta expressão em*

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Desejamos factorizar

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Isso é o valor do DETERMINANTE CIRCULANTE

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Desejamos factorizar

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Isso é o valor do DETERMINANTE CIRCULANTE

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc.$$

Mas podemos calcular este determinante de uma maneira diferente: somarmos a segunda e terça coluna á primeira:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

Mas podemos calcular este determinante de uma maneira diferente: somarmos a segunda e terça coluna á primeira:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix}$$

Mas podemos calcular este determinante de uma maneira diferente: somarmos a segunda e terça coluna á primeira:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

Mas podemos calcular este determinante de uma maneira diferente: somarmos a segunda e terça coluna á primeira:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).
\end{aligned}$$

Então

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Então

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

E por isso

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3ab - 1 &= (a + b - 1)(a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b) \\ &= 61 \times 33 \times (a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b). \end{aligned}$$

Voltamos ao calculo do determinante circulante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

Voltamos ao calculo do determinante circulante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

Seja $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Voltamos ao calculo do determinante circulante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

Seja $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$*;* ϵ *é uma terça raiz da unidade:* $\epsilon^3 = 1$.

Voltamos ao calculo do determinante circulante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

Seja $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; ϵ *é uma terça raiz da unidade:* $\epsilon^3 = 1$. *Vamos multiplicar*

$$b \text{ por } \epsilon \text{ e}$$
$$c \text{ por } \epsilon^2$$

e substituir no determinante.

$$\begin{vmatrix} a & \epsilon b & \epsilon^2 c \\ \epsilon^2 c & a & \epsilon b \\ \epsilon b & \epsilon^2 c & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & \epsilon b & \epsilon^2 c \\ \epsilon^2 c & a & \epsilon b \\ \epsilon b & \epsilon^2 c & a \end{vmatrix} = a^3 + \epsilon^3 b^3 + \epsilon^6 c^3 - 3a\epsilon b\epsilon^2 c$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc,$$

porque $\epsilon^3 = 1$.

E também

$$\begin{vmatrix} a & \epsilon b & \epsilon^2 c \\ \epsilon^2 c & a & \epsilon b \\ \epsilon b & \epsilon^2 c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\epsilon b+\epsilon^2 c & \epsilon b & \epsilon^2 c \\ \epsilon^2 c + a + \epsilon b & a & \epsilon b \\ \epsilon b + \epsilon^2 c + a & \epsilon c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+\epsilon b+\epsilon^2 c)\begin{vmatrix} 1 & \epsilon b & \epsilon^2 c \\ 1 & a & \epsilon b \\ 1 & \epsilon^2 c & a \end{vmatrix}.$$

Obtemos que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ *e divisível por* $a + \epsilon b + \epsilon^2 c$.

Obtemos que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ *e divisível por* $a + \epsilon b + \epsilon^2 c$.

Se trabalhamos com ϵ^2 *em lugar de* ϵ *obtemos que* $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ *e divisível por* $a + \epsilon^2 b + \epsilon c$.

Obtemos que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ *e divisível por* $a + \epsilon b + \epsilon^2 c$*.*

Se trabalhamos com e^2 *em lugar de* ϵ *obtemos que* $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ *e divisível por* $a + \epsilon^2 b + \epsilon c$*.*

No final obtemos a fatoração

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \epsilon b + \epsilon^2 c)(a + \epsilon^2 b + \epsilon c).$$

Obtemos que $a^3+b^3+c^3-3abc$ *e divisível por* $a+\epsilon b+\epsilon^2 c$.

Se trabalhamos com e^2 *em lugar de* ϵ *obtemos que* $a^3+b^3+c^3-3abc$ *e divisível por* $a+\epsilon^2 b+\epsilon c$.

No final obtemos a fatoração

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c).$$

Este é a fórmula de Luigi Cremona, que pode-se generalizar para todos os determinantes circulantes

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}(a_0+\epsilon^j a_1+\cdots+\epsilon^{(n-1)j}a_{n-1}),$$

onde $\epsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} (a_0 + \epsilon^j a_1 + \cdots + \epsilon^{(n-1)j} a_{n-1}),$$

onde $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} (a_0 + \epsilon^j a_1 + \cdots + \epsilon^{(n-1)j} a_{n-1}),$$

onde $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

A demostração original de Cremona usa a transformada de Fourier discreta:

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Com a fórmula de Euler, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, *Com a fórmula de Euler,* $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, *a transformada de Fourier discreta é*

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{n}} & e^{\frac{4\pi i}{n}} & \cdots & e^{\frac{2(n-1)i}{n}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{n}} & e^{\frac{8\pi i}{n}} & \cdots & e^{\frac{4(n-1)i}{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2(n-1)i}{n}} & e^{\frac{4(n-1)i}{n}} & \cdots & e^{\frac{2(n-1)^2 i}{n}} \end{pmatrix}.$$

Com a fórmula de Euler, $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, a transformada de Fourier discreta é

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{n}} & e^{\frac{4\pi i}{n}} & \cdots & e^{\frac{2(n-1)i}{n}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{n}} & e^{\frac{8\pi i}{n}} & \cdots & e^{\frac{4(n-1)i}{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2(n-1)i}{n}} & e^{\frac{4(n-1)i}{n}} & \cdots & e^{\frac{2(n-1)^2 i}{n}} \end{pmatrix}.$$

Vamos denotar

$$f_j(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j$$

$$
\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\
a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_0
\end{pmatrix}
\times \frac{1}{\sqrt{n}}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & \epsilon & \cdots & \epsilon^{n-1} \\
1 & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \epsilon^{n-1} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{n}}
\begin{pmatrix}
f(1) & f(\epsilon) & \cdots & f(\epsilon^{n-1}) \\
f(1) & \epsilon f(\epsilon) & \cdots & \epsilon^{n-1} f(\epsilon^{n-1}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
f(1) & \epsilon^{n-1} f(\epsilon) & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} f(\epsilon^{n-1})
\end{pmatrix}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} f(1) & f(\epsilon) & \cdots & f(\epsilon^{n-1}) \\ f(1) & \epsilon f(\epsilon) & \cdots & \epsilon^{n-1} f(\epsilon^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(1) & \epsilon^{n-1} f(\epsilon) & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} f(\epsilon^{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\epsilon) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\epsilon^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Se tomamos determinantes obtemos a fórmula de Cremona:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \times \textit{det}(\mathcal{F}_n)$$

$$= \textit{det}(\mathcal{F}_n) \prod_{j=0}^{n-1} f(\epsilon^j).$$

Se tomamos determinantes obtemos a fórmula de Cremona:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} f(\epsilon^j).$$

Observamos que a transformada de Fourier diagonaliza a matriz circulante:

$$\mathcal{F}_n^{-1} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \mathcal{F}_n$$

$$= \begin{pmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\epsilon) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\epsilon^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Observamos que a transformada de Fourier diagonaliza a matriz circulante:

$$\mathcal{F}_n^{-1} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \mathcal{F}_n$$

$$= \begin{pmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\epsilon) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\epsilon^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

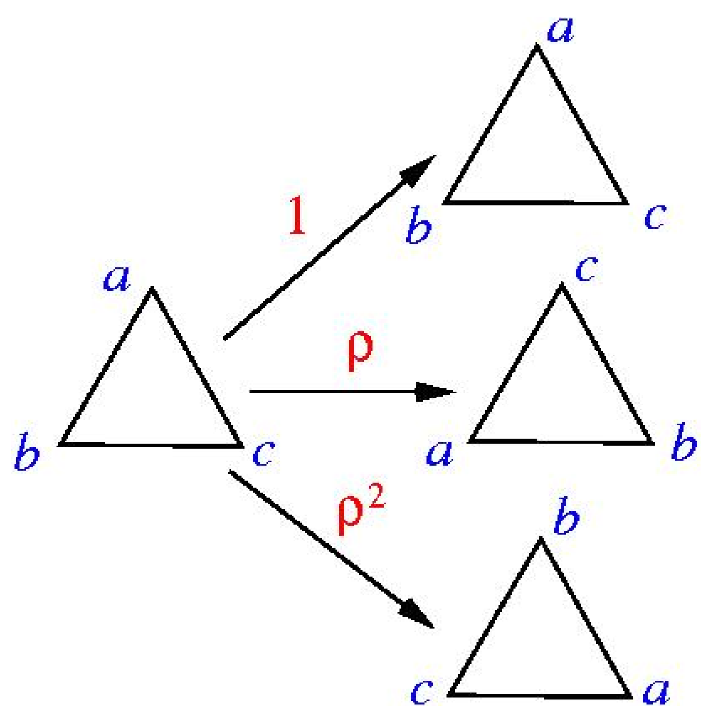
Este é um motivo por que os determinantes circulantes são importantes em telecomunicações e em processamento de sinais.

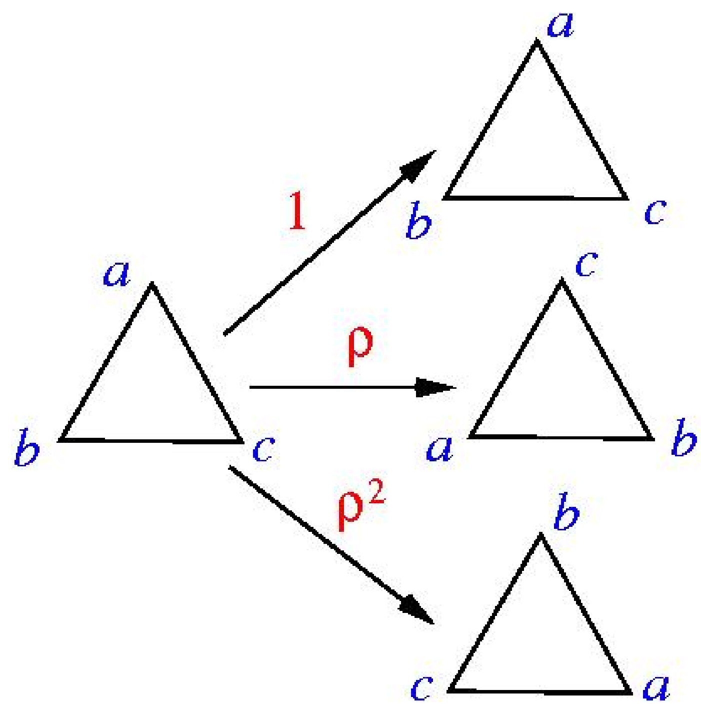
Voltamos á fórmula de Cremona

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c).$$

Voltamos á fórmula de Cremona

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c).$$





Isso é o grupo de rotações de um triângulo equilatero:

$$G = \{1, \rho, \rho^2 \,|\, \rho^3 = 1\}.$$

O grupo de rotações de um triângulo equilatero:

$$G = \{1, \rho, \rho^2 \mid \rho^3 = 1\}.$$

Se comparamos este grupo com a fatoração:

$$(a + b + c)(a + \epsilon b + \epsilon^2 c)(a + \epsilon^2 b + \epsilon c)$$

O grupo de rotações de um triângulo equilatero:

$$G = \{1, \rho, \rho^2 \mid \rho^3 = 1\}.$$

Se comparamos este grupo com a fatoração:

$$(a + b + c)(a + \epsilon b + \epsilon^2 c)(a + \epsilon^2 b + \epsilon c)$$

observamos que existem <u>exatamente</u> 3 homomorphismos de grupos

$$\chi_j : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad j = 0, 1, 2,$$

$\chi_j(\rho) = \epsilon^j$.

O grupo de rotações de um triângulo equilatero:

$$G = \{1, \rho, \rho^2 \,|\, \rho^3 = 1\}.$$

Se comparamos este grupo com a fatoração:

$$(a+b+c)(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c)$$

observamos que existem <u>*exatamente*</u> *3 homomorphismos de grupos*

$$\chi_j : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad j = 0, 1, 2,$$

$\chi_j(\rho) = \epsilon^j$. *Denotemos* $\hat{\mathrm{G}}$ *o conjunto (grupo) de homomorphismos* $\chi : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$

O grupo de rotações de um triângulo equilatero:

$$G = \{1, \rho, \rho^2 \,|\, \rho^3 = 1\}.$$

Se comparamos este grupo com a fatoração:

$$(a + b + c)(a + \epsilon b + \epsilon^2 c)(a + \epsilon^2 b + \epsilon c)$$

observamos que existem <u>*exatamente*</u> *3 homomorphismos de grupos*

$$\chi_j : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad j = 0, 1, 2,$$

$\chi_j(\rho) = \epsilon^j$. *Denotemos* $\hat{G}$ *o conjunto (grupo) de homomorphismos* $\chi : G \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$*; então*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \prod_{\chi \in \widehat{G}} (\chi(1)a + \chi(\rho)b + \chi(\rho^2)c).$$

Motivado por problemas de teoria de números, Richard Dedekind generalizou esta identidade da forma seguinte:

Motivado por problemas de teoria de números, Richard Dedekind generalizou esta identidade da forma seguinte:

Dado um grupo finito abeliano

$$G = g_1, g_2, \ldots, g_n,$$

vamos considerar uma sequência

$$a_{g_1}, a_{g_2}, \ldots, a_{g_n}.$$

Motivado por problemas de teoria de números, Richard Dedekind generalizou esta identidade da forma seguinte:

Dado um grupo finito abeliano

$$G = g_1, g_2, \ldots, g_n,$$

vamos considerar uma sequência

$$a_{g_1}, a_{g_2}, \ldots, a_{g_n}.$$

Definimos o determinante

$$\det(a_{g_j g_k^{-1}})$$

a entrada jk *de quem é* $a_{g_j g_k^{-1}}$*.*

Dedekind demonstrou que

$$\det(a_{g_j g_k^{-1}}) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \left(\sum_{g \in G} \chi(g) a_g \right)$$

onde $\widehat{G}$ *é o grupo de homomorfismos de* G *em* $\mathbb{C} \backslash \{0\}$*.*

Dedekind demonstrou que

$$\det(a_{g_j g_k^{-1}}) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \left(\sum_{g \in G} \chi(g) a_g \right)$$

onde $\widehat{G}$ *é o grupo de homomorfismos de* G *em* $\mathbb{C} \backslash \{0\}$*.*

Com esta fórmula naceu a **teoria de representações de grupos***.*

A fatoração

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

pode-se usar para demonstrar, no caso particular de três números positivos x, y, z*, a desigualdade das médias:*

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

A fatoração

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

pode-se usar para demonstrar, no caso particular de três números positivos x, y, z, *a desigualdade das médias:*

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Seja $x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$.

A fatoração

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

pode-se usar para demonstrar, no caso particular de três números positivos x, y, z, a desigualdade das médias:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Seja $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$.

A fatoração

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

pode-se usar para demonstrar, no caso particular de três números positivos x, y, z*, a desigualdade das médias:*

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Seja $x = a^3$*,* $y = b^3$*,* $z = c^3$*.*

Então

$$\begin{aligned} x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} &= a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
&= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].
\end{aligned}
$$

$$a, b, c > 0,$$

$$
\begin{aligned}
x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} &= a^3+b^3+c^3-3abc \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].
\end{aligned}
$$

$$
a, b, c > 0,
$$

$$
(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.
$$

$$
\begin{aligned}
x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} &= a^3+b^3+c^3-3abc \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].
\end{aligned}
$$

$$
a, b, c > 0,
$$

$$
(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.
$$

Por isso

$$
x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} = a^3+b^3+c^3-3abc \geq 0.
$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
&= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].
\end{aligned}
$$

$$a, b, c > 0,$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Por isso

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 0.$$

QED.

Problema *Determinar o minimo global da função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 3^{x+y}(3^{x-1} + 3^{y-1} - 1).$$

Problema *Demonstrar a igualdade*

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

<u>Problema</u> *Demonstrar a igualdade*

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Este é um tipo de problema com **variavel escondida**.

Para calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

...

... definimos a função

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}.$$

... definimos a função

$$f(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix}.$$

O problema pede calcular $f(1)$*.*

Vamos demonstrar que

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

é uma função linear.

Vamos demonstrar que

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

é uma função linear.

Por isso utilisamos derivadas.

Seja $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Usando a regra do producto obtemos...

$$\phi'(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \dots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \dots & a'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a'_{n1}(x) & a'_{n2}(x) & \dots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Para

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

obtemos...

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots x & \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots x & \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Do mesmo modo obtemos que a segunda derivada de f é igual a zero.

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots x \\ x & x+a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Do mesmo modo obtemos que a segunda derivada de f é igual a zero:

$$f''(x) = 0.$$

Por isso

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

é uma função linear.

Por isso

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

é uma função linear:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x.$$

Por isso

$$f(x) = \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \dots & x \\ x & x + a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x & x & \dots & x + a_n \end{vmatrix}$$

é uma função linear:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x.$$

É fácil ver que

$$f(0) = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Também

$$f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Também

$$f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

Também

$$f'(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_2 a_3 \cdots a_n + a_1 a_3 \cdots a_n + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$$

$$= a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Obtemos que

$$f(x) = a_1 a_2 \cdots a_n \left[1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) x \right].$$

Obtemos que

$$f(x) = a_1 a_2 \cdots a_n \left[1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) x \right].$$

No caso $x = 1$*,*

$$f(1) = a_1 a_2 \cdots a_n \left[1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \right].$$

Obtemos que

$$f(x) = a_1a_2\cdots a_n\left[1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)x\right].$$

No caso $x = 1$*,*

$$f(1) = a_1a_2\cdots a_n\left[1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\right].$$

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Problema Demonstrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a & a & \cdots & a \\ b & a_2 & a & \cdots & a \\ b & b & a_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

onde

$$f(t) = (a_1 - t)(a_2 - t)\cdots(a_n - t).$$

Problema Demonstrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a & a & \cdots & a \\ b & a_2 & a & \cdots & a \\ b & b & a_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

onde

$$f(t) = (a_1 - t)(a_2 - t) \cdots (a_n - t).$$

Onde esta a variavel escondida?

Aqui:

Problema *Demonstrar que*

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ b & a_2 & x & \cdots & x \\ b & b & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \frac{bf(x) - xf(b)}{b - x}$$

onde

$$f(t) = (a_1 - t)(a_2 - t) \cdots (a_n - t).$$

Aqui:

Problema *Demonstrar que*

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ b & a_2 & x & \cdots & x \\ b & b & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \frac{bf(x) - xf(b)}{b - x}$$

onde

$$f(t) = (a_1 - t)(a_2 - t)\cdots(a_n - t).$$

Podemos assumir que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *são diferentes (por exemplo são variaveis independentes).*

$$P(x)=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ b & a_2 & x & \cdots & x \\ b & b & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$Q(x)=\frac{bf(x)-xf(b)}{b-x}.$$

Vamos demonstrar que $P(x)=Q(x)$.

$$P(x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ b & a_2 & x & \cdots & x \\ b & b & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$Q(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{b - x}.$$

$P(x)$ *e* $Q(x)$ *são polinomios de grau* $n - 1$.

$$P(x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ b & a_2 & x & \cdots & x \\ b & b & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$Q(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{b - x}.$$

$P(x)$ *e* $Q(x)$ *são polinomios de grau* $n-1$. *Além disso*

$$P(x) = bx^{n-1} + \cdots, \quad Q(x) = bx^{n-1} + \cdots$$

Calculamos

$$P(a_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b & a_2 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b & b & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Calculamos

$$P(a_1) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_2 - b & a_1 - b & \cdots & a_1 - b \\ b & 0 & a_3 - b & \cdots & a_1 - b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

E agora desenvolvemos o determinante

$$P(a_1) = a_1 \begin{vmatrix} a_2 - b & a_1 - b & \cdots & a_1 - b \\ 0 & a_3 - b & \cdots & a_1 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

E agora desenvolvemos o determinante

$$P(a_1) = a_1 \begin{vmatrix} a_2 - b & a_1 - b & \cdots & a_1 - b \\ 0 & a_3 - b & \cdots & a_1 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

$$= a_1(a_2 - b)(a_3 - b)\cdots(a_n - b)$$

E agora desenvolvemos o determinante

$$
\begin{aligned}
P(a_1) = a_1 & \begin{vmatrix} a_2-b & a_1-b & \cdots & a_1-b \\ 0 & a_3-b & \cdots & a_1-b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} \\
&= a_1(a_2-b)(a_3-b)\cdots(a_n-b) \\
&= \frac{a_1 f(b)}{b-a_1}
\end{aligned}
$$

E agora desenvolvemos o determinante

$$
\begin{aligned}
P(a_1) = a_1 &\begin{vmatrix} a_2 - b & a_1 - b & \cdots & a_1 - b \\ 0 & a_3 - b & \cdots & a_1 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} \\
&= a_1(a_2 - b)(a_3 - b)\cdots(a_n - b) \\
&= \frac{bf(a_1) - a_1 f(b)}{b - a_1}.
\end{aligned}
$$

E agora desenvolvemos o determinante

$$\begin{aligned} P(a_1) &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 - b & a_1 - b & \cdots & a_1 - b \\ 0 & a_3 - b & \cdots & a_1 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} \\ &= a_1(a_2 - b)(a_3 - b)\cdots(a_n - b) \\ &= \frac{bf(a_1) - a_1 f(b)}{b - a_1}. \end{aligned}$$

$$P(a_1) = Q(a_1)$$

Calculamos

$$P(a_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ b & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ b & b & a_3 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Calculamos

$$P(a_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b & b & a_3 - b & \cdots & a_2 - b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

Calculamos

$$P(a_2) = \begin{vmatrix} a_1 - b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b & b & a_3 - b & \cdots & a_2 - b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

Desenvolvemos o determinante

$$P(a_2) = (a_1 - b)a_2 \begin{vmatrix} a_3 - b & a_2 - b & \cdots & a_2 - b \\ 0 & a_4 - b & \cdots & a_2 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

Desenvolvemos o determinante

$$P(a_2) = (a_1 - b)a_2 \begin{vmatrix} a_3 - b & a_2 - b & \cdots & a_2 - b \\ 0 & a_4 - b & \cdots & a_2 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - b)a_2(a_3 - b)\cdots(a_n - b)$$

Desenvolvemos o determinante

$$P(a_2) = (a_1 - b)a_2 \begin{vmatrix} a_3 - b & a_2 - b & \cdots & a_2 - b \\ 0 & a_4 - b & \cdots & a_2 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - b)a_2(a_3 - b)\cdots(a_n - b)$$

$$= \frac{a_2 f(b)}{b - a_2}$$

Desenvolvemos o determinante

$$
\begin{aligned}
P(a_2) = (a_1 - b)a_2 &\begin{vmatrix} a_3 - b & a_2 - b & \cdots & a_2 - b \\ 0 & a_4 - b & \cdots & a_2 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} \\
&= (a_1 - b)a_2(a_3 - b)\cdots(a_n - b) \\
&= \frac{bf(a_2) - a_2 f(b)}{b - a_2}
\end{aligned}
$$

Desenvolvemos o determinante

$$\begin{aligned}
P(a_2) = (a_1 - b)a_2 &\begin{vmatrix} a_3 - b & a_2 - b & \cdots & a_2 - b \\ 0 & a_4 - b & \cdots & a_2 - b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} \\
&= (a_1 - b)a_2(a_3 - b)\cdots(a_n - b) \\
&= \frac{bf(a_2) - a_2 f(b)}{b - a_2}
\end{aligned}$$

$$P(a_2) = Q(a_2).$$

$$P(x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ b & a_2 & x & \cdots & x \\ b & b & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$Q(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{b - x}.$$

No final:

$$P(a_1) = Q(a_1), \quad P(a_2) = Q(a_2), \cdots, P(a_n) = Q(a_n).$$

$$P(x) = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ b & a_2 & x & \cdots & x \\ b & b & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$Q(x) = \frac{bf(x) - xf(b)}{b - x}.$$

Então $P(x) = Q(x)$.

Problema *Seja* A *e* B 3×3 *matrizes com elementos reais tal que*

$$\det A = \det B = \det(A + B) = \det(A - B) = 0.$$

Quais são os valores possíveis de $\det(2A + 5B)$*?*

Problema *Seja* A *e* B 3×3 *matrizes com elementos reais tal que*

$$\det A = \det B = \det(A + B) = \det(A - B) = 0.$$

Quais são os valores possíveis de $\det(2A + 5B)$*?*

(M. Martin, Olimpiada de Matemática Rômena)

Problema *Seja* A *e* B 3×3 *matrizes com elementos reais tal que*

$$\det A = \det B = \det(A + B) = \det(A - B) = 0.$$

Quais são os valores possíveis de $\det(2A + 5B)$*?*

Este é um outro exemplo de problema com **variavel escondida**.

Definimos

$$P(x) = \det(A + xB).$$

Definimos

$$P(x) = \det(A + xB).$$

Este é um polinomio de grau no máximo 3*.*

Definimos

$$P(x) = \det(A + xB).$$

Este é um polinomio de grau no máximo 3. *Por que*

$$P(0) = \det(A) = 0$$

Definimos

$$P(x) = \det(A + xB).$$

Este é um polinomio de grau no máximo 3. *Por que*

$$P(0) = \det(A) = 0$$
$$P(1) = \det(A + B) = 0$$

Definimos

$$P(x) = \det(A + xB).$$

Este é um polinomio de grau no máximo 3. *Por que*

$$P(0) = \det(A) = 0$$
$$P(1) = \det(A + B) = 0$$
$$P(-1) = \det(A - B) = 0$$

Definimos

$$P(x) = \det(A + xB).$$

Este é um polinomio de grau no máximo 3*. Por que*

$$P(0) = \det(A) = 0$$
$$P(1) = \det(A + B) = 0$$
$$P(-1) = \det(A - B) = 0$$

temos

$$P(x) = \alpha x(x - 1)(x + 1).$$

Definimos

$$P(x) = \det(A + xB).$$

Este é um polinomio de grau no máximo 3. *Por que*

$$P(0) = \det(A) = 0$$
$$P(1) = \det(A + B) = 0$$
$$P(-1) = \det(A - B) = 0$$

temos

$$P(x) = \alpha x(x-1)(x+1).$$

O coeficiente α pode-se calcular do seguinte limite

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{x^3}$$

O coeficiente α pode-se calcular do seguinte limite

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\det(A + xB)}{x^3}\end{aligned}$$

O coeficiente α pode-se calcular do seguinte limite

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\det(A + xB)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \det(\frac{1}{x}A + B)\end{aligned}$$

O coeficiente α pode-se calcular do seguinte limite

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\det(A + xB)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \det(\frac{1}{x}A + B) \\
&= \det B
\end{aligned}$$

O coeficiente α pode-se calcular do seguinte limite

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\det(A + xB)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to\infty} \det(\frac{1}{x}A + B) \\
&= \det B = 0.
\end{aligned}$$

O coeficiente α pode-se calcular do seguinte limite

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\det(A+xB)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \det(\frac{1}{x}A+B) \\ &= \det B = 0.\end{aligned}$$

Por isso $P(x) \equiv 0$,

O coeficiente α pode-se calcular do seguinte limite

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\det(A+xB)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to\infty} \det(\frac{1}{x}A+B)\\ &= \det B = 0.\end{aligned}$$

Por isso $P(x) \equiv 0$, e

$$\det(2A+3B) = 2^3 \det\left(A+\frac{3}{2}B\right) = P\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$$

Um resultado clássico do mesmo tipo é

Um resultado clássico do mesmo tipo é

Teorema *Sejam A e B matrizes de dimensão $n \times n$. Então*

$$\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA).$$

Um resultado clássico do mesmo tipo é

Teorema *Sejam* A *e* B *matrizes de dimensão* $n \times n$. *Então*

$$\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA).$$

Para a demonstração introduzimos a variavel "escondida" x *e substituímos* B *por* $xI_n + B$.

$$\det[I_n + AB] = \det[I_n + BA].$$

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[I_n + (xI_n + B)A].$$

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[I_n + (xI_n + B)A].$$

A função

$$P(x) = \det(xI_n + B)$$

é um polinomio em x, por isso $P(x) = 0$ para no máximo n valores de x.

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[I_n + (xI_n + B)A].$$

A função

$$P(x) = \det(xI_n + B)$$

é um polinomio em x*, por isso* $P(x) = 0$ *para no máximo* n *valores de* x*.*

Quando $P(x) \neq 0$*, a matriz* $xI_n + B$ *é invertível...*

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[I_n + (xI_n + B)A].$$

A função

$$P(x) = \det(xI_n + B)$$

é um polinomio em x*, por isso* $P(x) = 0$ *para no máximo* n *valores de* x*.*

Quando $P(x) \neq 0$*, a matriz* $xI_n + B$ *é invertível e podemos fatorar*

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[[(xI_n + B)^{-1} + A](xI_n + B)]$$

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[[(xI_n + B)^{-1} + A](xI_n + B)]$$

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[[(xI_n + B)^{-1} + A](xI_n + B)]$$
$$= \det[(xI_n + B)^{-1} + A] \det(xI_n + B)$$

$$\begin{aligned}\det[I_n + A(xI_n + B)] &= \det[[(xI_n + B)^{-1} + A](xI_n + B)] \\ &= \det[(xI_n + B)^{-1} + A]\det(xI_n + B) \\ &= \det(xI_n + B)\det[(xI_n + B)^{-1} + A]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\det[I_n + A(xI_n + B)] &= \det[[(xI_n + B)^{-1} + A](xI_n + B)] \\
&= \det[(xI_n + B)^{-1} + A]\det(xI_n + B) \\
&= \det(xI_n + B)\det[(xI_n + B)^{-1} + A] \\
&= \det[(xI_n + B)[(xI_n + B)^{-1} + A]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\det[I_n + A(xI_n + B)] &= \det[[(xI_n + B)^{-1} + A](xI_n + B)] \\
&= \det[(xI_n + B)^{-1} + A] \det(xI_n + B) \\
&= \det(xI_n + B) \det[(xI_n + B)^{-1} + A] \\
&= \det[(xI_n + B)[(xI_n + B)^{-1} + A]] \\
&= \det[I_n + (xI_n + B)A].
\end{aligned}
$$

Obtemos que

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[I_n + (xI_n + B)A].$$

para todos os x *tal que* $\det(xI_n + B) \neq 0$.

Obtemos que

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[I_n + (xI_n + B)A].$$

para todos os x *tal que* $\det(xI_n + B) \neq 0$.

As funções

$$Q(x) = \det[I_n + A(xI_n + B)], \quad R(x) = \det[I_n + (xI_n + B)A]$$

são polinomios em x, *por isso se elas são iguais para um número infinito de valores de* x, *então elas são iguais para todos os* x.

Obtemos que

$$\det[I_n + A(xI_n + B)] = \det[I_n + (xI_n + B)A].$$

para todos os x *tal que* $\det(xI_n + B) \neq 0$.

As funções

$$Q(x) = \det[I_n + A(xI_n + B)], \quad R(x) = \det[I_n + (xI_n + B)A]$$

são polinomios em x*, por isso se elas são iguais para um número infinito de valores de* x*, então elas são iguais para todos os* x*.*

Para $x = 0$*,*

$$\det(I_n + AB) = \det(I_n + BA).$$

<u>**Problema**</u> *Seja* A *uma matriz de dimensão* $n \times n$ *com entradas reais. Demonstrar que*

$$\det(A^2 + I_n) \geq 0.$$

Problema *Seja A uma matriz de dimensão $n \times n$ com entradas reais. Demonstrar que*

$$\det(A^2 + I_n) \geq 0.$$

Introduzimos a variavel x e consideramos o determinante

$$\det(A^2 - x^2 I_n)$$

$$\begin{aligned}\det(A^2 - x^2 I_n) &= \det[(A - xI_n)(A + xI_n)] \\ &= \det(A - xI_n)\det(A + xI_n).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\det(A^2 - x^2 I_n) &= \det[(A - xI_n)(A + xI_n)] \\
&= \det(A - xI_n)\det(A + xI_n).
\end{aligned}
$$

Seja

$$
P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n)
$$

o polinomio caracteristico de A.

$$\begin{aligned}\det(A^2 - x^2 I_n) &= \det[(A - xI_n)(A + xI_n)] \\ &= \det(A - xI_n)\det(A + xI_n).\end{aligned}$$

Seja

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n)$$

o polinomio caracteristico de A. *Então o polinomio caracteristico de* $-A$ *é*

$$P_{-A} = (x + \lambda_1)(x + \lambda_2)\cdots(x + \lambda_n).$$

Obtemos que

$$\det(A - xI_n)\det(A + xI_n)$$
$$= (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n + x)$$

Obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\det(A - xI_n)\det(A + xI_n) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 - x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_n + x)
\end{aligned}
$$

Obtemos que

$$\begin{aligned}
&\det(A - xI_n)\det(A + xI_n) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 - x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1^2 - x^2)(\lambda_2^2 - x^2)\cdots(\lambda_n^2 - x^2).
\end{aligned}$$

Obtemos que

$$\begin{aligned}
&\det(A - xI_n)\det(A + xI_n)\\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n + x)\\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 - x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_n + x)\\
&\quad = (\lambda_1^2 - x^2)(\lambda_2^2 - x^2)\cdots(\lambda_n^2 - x^2).
\end{aligned}$$

Para $x = i$ *obtemos*

$$\det(A^2 + I_n) = (\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)\cdots(\lambda_n^2 + 1)$$

Obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\det(A - xI_n)\det(A + xI_n) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 - x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1^2 - x^2)(\lambda_2^2 - x^2)\cdots(\lambda_n^2 - x^2).
\end{aligned}
$$

Para $x = i$ *obtemos*

$$\det(A^2 + I_n) = (\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)\cdots(\lambda_n^2 + 1)$$

Basta!

Obtemos que

$$\begin{aligned}
&\det(A - xI_n)\det(A + xI_n) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 - x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1^2 - x^2)(\lambda_2^2 - x^2)\cdots(\lambda_n^2 - x^2).
\end{aligned}$$

Para $x = i$ *obtemos*

$$\det(A^2 + I_n) = (\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)\cdots(\lambda_n^2 + 1)$$

Basta??????

Obtemos que

$$\begin{aligned}
&\det(A - xI_n)\det(A + xI_n) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1 - x)(\lambda_1 + x)(\lambda_2 - x)(\lambda_2 + x)\cdots(\lambda_n - x)(\lambda_n + x) \\
&\quad = (\lambda_1^2 - x^2)(\lambda_2^2 - x^2)\cdots(\lambda_n^2 - x^2).
\end{aligned}$$

Para $x = i$ *obtemos*

$$\det(A^2 + I_n) = (\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)\cdots(\lambda_n^2 + 1)$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1 > 0$.

Mas se $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1$ *é um número complexo.*

Mas se $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1$ *é um número complexo. Neste caso observamos que cada valor propriu vem com seu conjugado.*

Mas se $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1$ *é um número complexo. Neste caso observamos que cada valor propriu vem com seu conjugado.*

Então na fatoração temos fatores de forma

$$(\lambda^2 + 1)(\overline{\lambda}^2 + 1)$$

Mas se $\lambda \notin \mathbb{R}$*,* $\lambda^2 + 1$ *é um número complexo. Neste caso observamos que cada valor propriu vem com seu conjugado.*

Então na fatoração temos fatores de forma

$$(\lambda^2 + 1)(\overline{\lambda}^2 + 1) = (z + 1)(\overline{z} + 1)$$

Mas se $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1$ é um número complexo. Neste caso observamos que cada valor propriu vem com seu conjugado.

Então na fatoração temos fatores de forma

$$(\lambda^2 + 1)(\overline{\lambda}^2 + 1) = (z + 1)(\overline{z} + 1) = (z + 1)\overline{(z + 1)}.$$

Mas se $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1$ é um número complexo. Neste caso observamos que cada valor propriu vem com seu conjugado.

Então na fatoração temos fatores de forma

$$(\lambda^2 + 1)(\overline{\lambda}^2 + 1) = (z + 1)(\overline{z} + 1) = (z + 1)\overline{(z + 1)} \geq 0.$$

Mas se $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1$ é um número complexo. Neste caso observamos que cada valor propriu vem com seu conjugado.

Então na fatoração temos fatores de forma

$$(\lambda^2 + 1)(\overline{\lambda}^2 + 1) = (z + 1)(\overline{z} + 1) = (z + 1)\overline{(z + 1)} \geq 0.$$

Concluimos que

$$\det(A^2 + I_n) \geq 0.$$

<u>Problema</u> *As coordenadas dos vértices de um cubo são números inteiros. Demonstrar que o comprimento da aresta do cubo é um número inteiro tambem.*

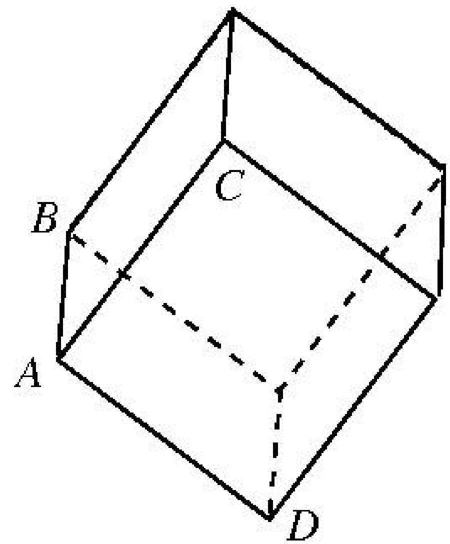
Continuamos com aplicações de determinantes em problemas de geometria.

Problema *As coordenadas dos vértices de um cubo são números inteiros. Demonstrar que o comprimento da aresta do cubo é um número inteiro tambem.*

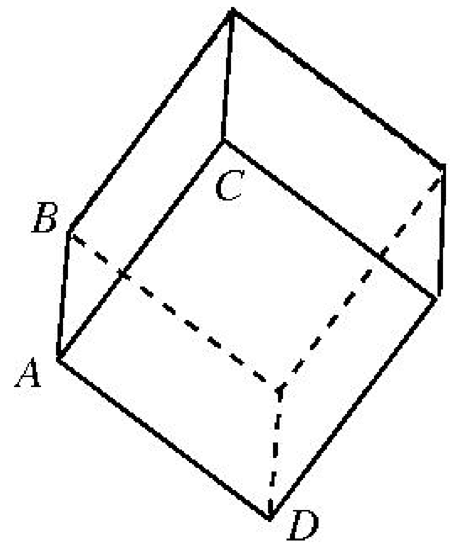
Continuamos com aplicações de determinantes em problemas de geometria.

Problema As coordenadas dos vértices de um cubo são números inteiros. Demonstrar que o comprimento da aresta do cubo é um número inteiro tambem.

Onde esta o determinante?

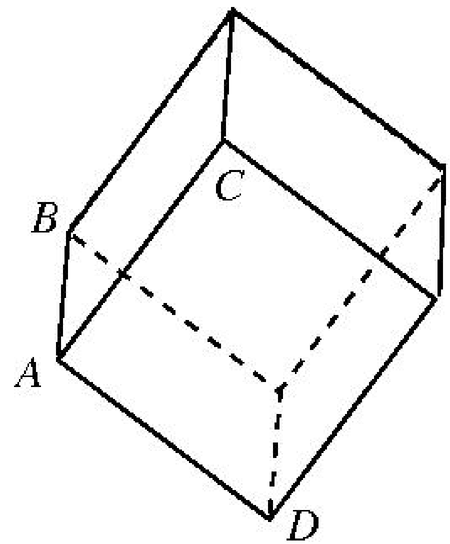


$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$$



$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$$

$$\textit{Volume(cubo)} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$



$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$$

$$\textit{Volume(cubo)} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \in \mathbb{Z}$$

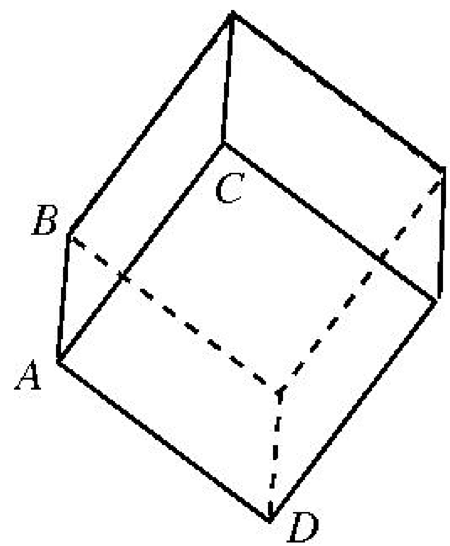
Seja ℓ *o comprimento da aresta. Então*

$$\textit{Volume(cubo)} = \ell^3 \in \mathbb{Z}.$$

Seja ℓ o comprimento da aresta. Então

$$\text{Volume(cubo)} = \ell^3 \in \mathbb{Z}.$$

Além disso

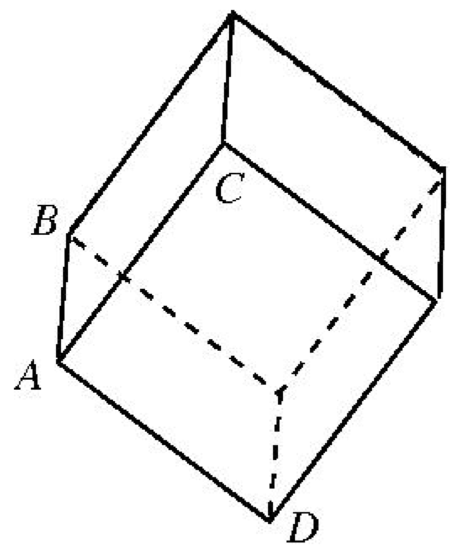


$$\ell^2 = AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

Seja ℓ o comprimento da aresta. Então

$$\text{Volume(cubo)} = \ell^3 \in \mathbb{Z}.$$

Além disso



$$\ell^2 = AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \in \mathbb{Z}.$$

$\ell^3 \in \mathbb{Z}$ e $\ell^2 \in \mathbb{Z}$,

$$\ell^3 \in \mathbb{Z} \text{ e } \ell^2 \in \mathbb{Z},$$

por isso

$$\ell = \ell^3/\ell^2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\ell^3 \in \mathbb{Z} \text{ e } \ell^2 \in \mathbb{Z},$$

por isso

$$\ell = \ell^3/\ell^2 \in \mathbb{Q}!!!$$

$$\ell^3 \in \mathbb{Z} \text{ e } \ell^2 \in \mathbb{Z},$$

por isso

$$\ell = \ell^3/\ell^2 \in \mathbb{Q}!!!$$

Mas também $\ell^2 \in \mathbb{Z}$.

$$\ell^3 \in \mathbb{Z} \text{ *e* } \ell^2 \in \mathbb{Z},$$

por isso

$$\ell = \ell^3/\ell^2 \in \mathbb{Q}!!!$$

Mas também $\ell^2 \in \mathbb{Z}$. *Então* $\ell \in \mathbb{Z}$.

$$\ell^3 \in \mathbb{Z} \text{ e } \ell^2 \in \mathbb{Z},$$

por isso

$$\ell = \ell^3/\ell^2 \in \mathbb{Q}!!!$$

Mas também $\ell^2 \in \mathbb{Z}$. *Então* $\ell \in \mathbb{Z}$. *QED.*

$$\textit{Volume(cubo)} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$\mathit{Volume(cubo)} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

ou

$$\mathit{Volume(cubo)} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} ?$$

Outro problema do mesmo tipo:

Problema *Seja* ABC *um triângulo com lados* a, b, c, *tal que* $a \geq b \geq c$. *Sejam* A, B, C *os comprimentos dos ângulos. Demonstrar que*

$$a(C - B) + c(B - A) + b(A - C) \geq 0.$$

$$a(C-B)+c(B-A)+b(A-C)\geq 0.$$

Sabemos que

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C,$$

onde R *é o raio do circulo circunscrito.*

$$a(C-B)+c(B-A)+b(A-C)\geq 0.$$

Sabemos que

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C,$$

onde R é o raio do circulo circunscrito. Devemos provar que

$$\sin A(C-B)+\sin C(B-A)+\sin B(A-C)\geq 0.$$

Sabemos que

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C,$$

onde R *é o raio do circulo circunscrito. Devemos provar que*

$$\sin A(C - B) + \sin C(B - A) + \sin B(A - C) \geq 0.$$

que é o mesmo que

$$C \sin A - B \sin A + B \sin C - A \sin C + A \sin B - C \sin B \geq 0.$$

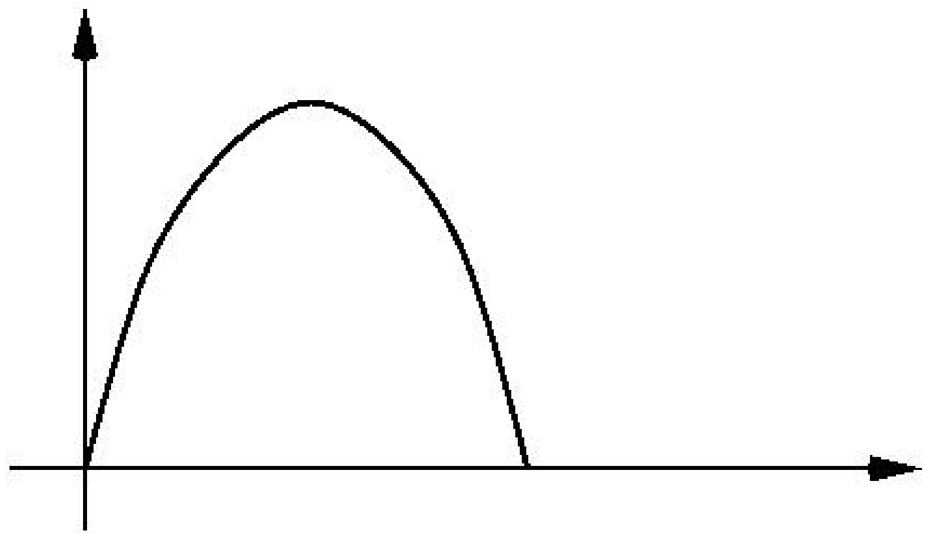
O gráfico da função

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$$

O gráfico da função

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$$

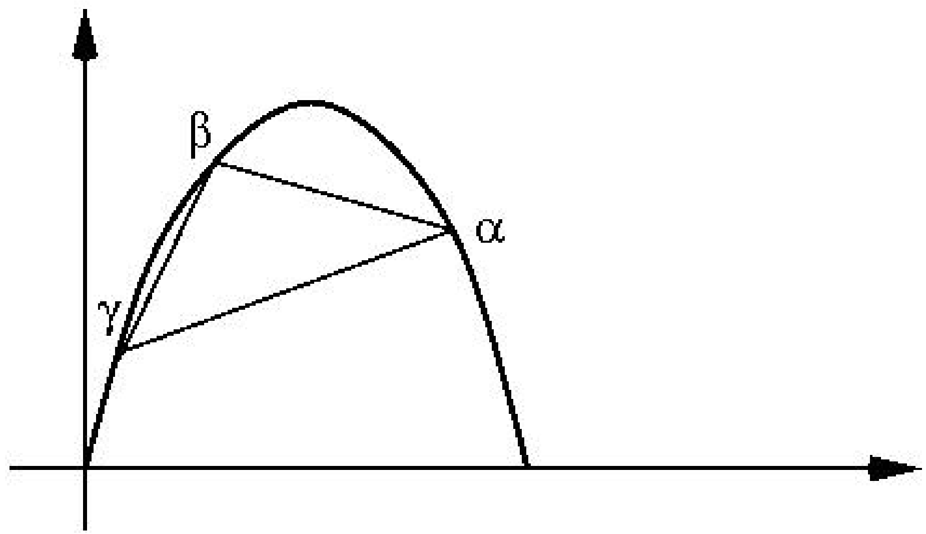
é



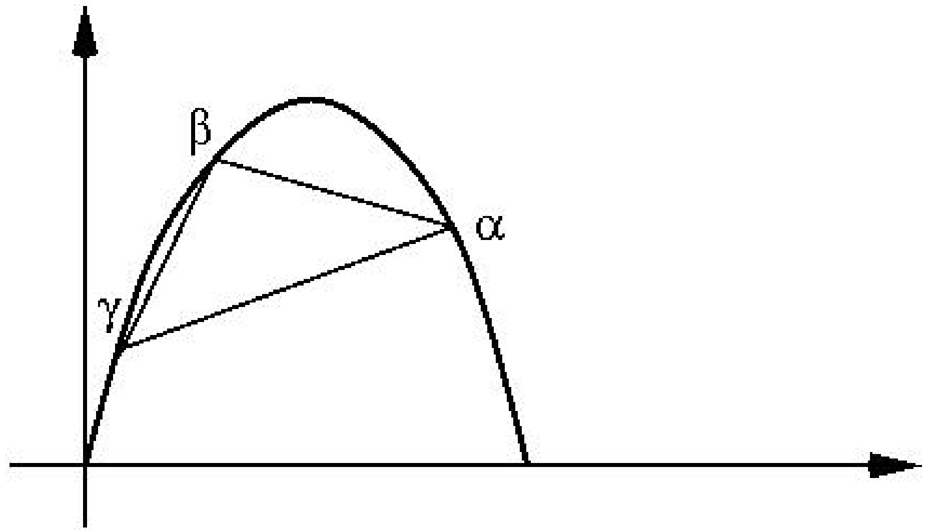
O gráfico da função

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$$

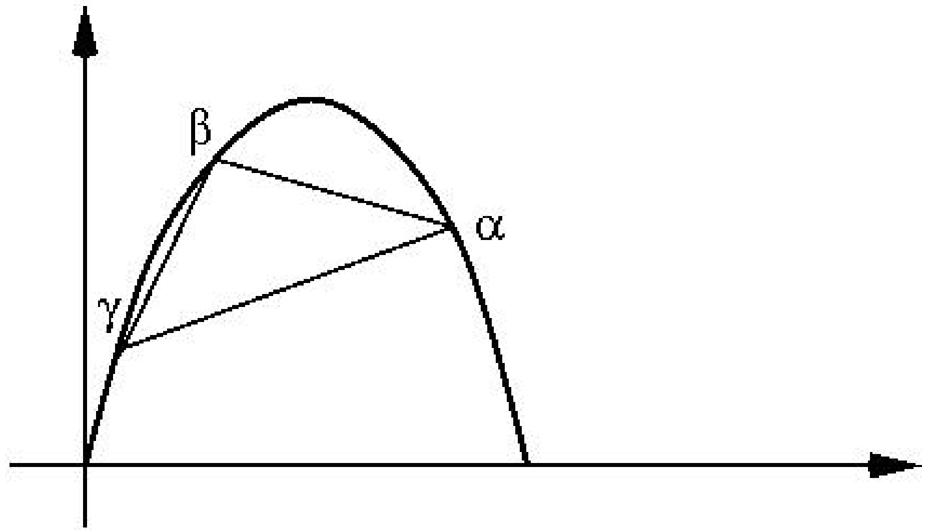
é



e também com o triângulo $\alpha(A, \sin A), \beta(B, \sin B), \gamma(C, \sin C)$

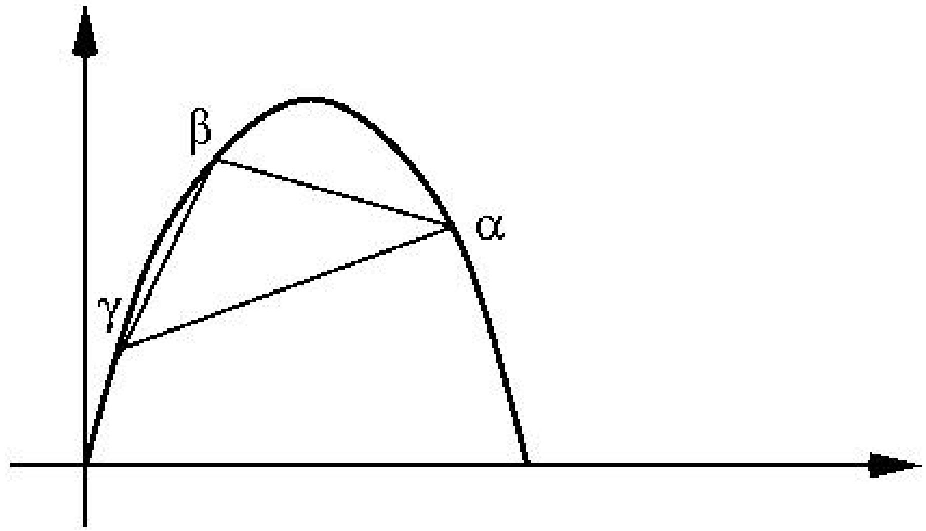


$$\mathit{Area}(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}.$$



$$\textit{Area}(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}.$$

Aqui é importante a orientação do triângulo ABC*, e por isso é importante a forma do gráfico.*



$$\textit{Area}(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix}.$$

Aqui é importante a orientação do triângulo ABC, *e por isso é importante a forma do gráfico.*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = \textsf{\textit{Area}}(\alpha\beta\gamma)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = \textsf{\textit{Area}}(\alpha\beta\gamma) \geq 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = \textit{Area}(\alpha\beta\gamma) \geq 0.$$

Com a regra de Sarrus obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = B\sin C + C\sin A + A\sin B - B\sin A$$

$$-C\sin B - A\sin C.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = \textit{Area}(\alpha\beta\gamma) \geq 0.$$

Com a regra de Sarrus obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \sin A & \sin B & \sin C \end{vmatrix} = B\sin C + C\sin A + A\sin B - B\sin A$$

$$-C\sin B - A\sin C.$$

Então

$$B\sin C + C\sin A + A\sin B - B\sin A - C\sin B - A\sin C \geq 0.$$

<u>Problema</u> Demonstrar que não existem quatro pontos no plano tal que as distâncias entre eles sejam números inteiros ímpares.

Problema Demonstrar que não existem quatro pontos no plano tal que as distâncias entre eles sejam números inteiros ímpares.

(1993 William Lowell Putnam Mathematical Competition)

Problema *Demonstrar que não existem quatro pontos no plano tal que as distâncias entre eles sejam números inteiros ímpares.*

(1993 William Lowell Putnam Mathematical Competition)

Livros:

- The William Lowell Putnam Mathematical Competition, 1985-2000, *Kiran Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil, MAA, 2002.*
- Putnam and Beyond, *Răzvan Gelca, Titu Andreescu, Springer, first edition 2007, second edition 2017(?).*

Problema Demonstrar que não existem quatro pontos no plano tal que as distâncias entre eles sejam números inteiros ímpares.

Vou apresentar a solução de Manjul Bhargava.

Fields Medal (Medalha Fields) 2014

-

Fields Medal (Medalha Fields) 2014

- *Artur Avila*
-

Fields Medal (Medalha Fields) 2014

- *Artur Avila (Brasil)*
-

Fields Medal (Medalha Fields) 2014

- *Artur Avila (Brasil)*
- *Manjul Bhargava*
-

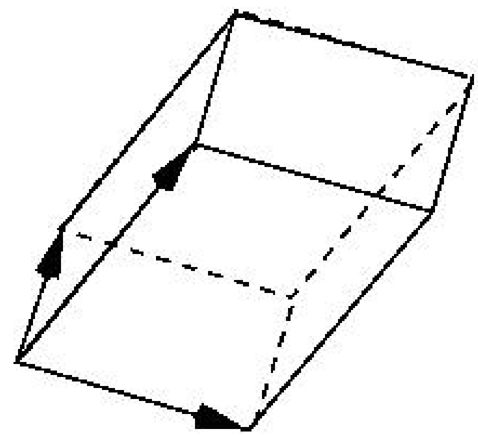
Fields Medal (Medalha Fields) 2014

- *Artur Avila (Brasil)*
- *Manjul Bhargava*
- *Martin Hairer*
-

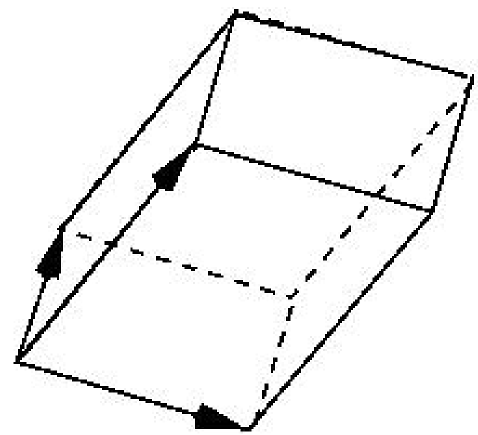
Fields Medal (Medalha Fields) 2014

- *Artur Avila (Brasil)*
- *Manjul Bhargava*
- *Martin Hairer*
- *Maryam Mirzakhani*

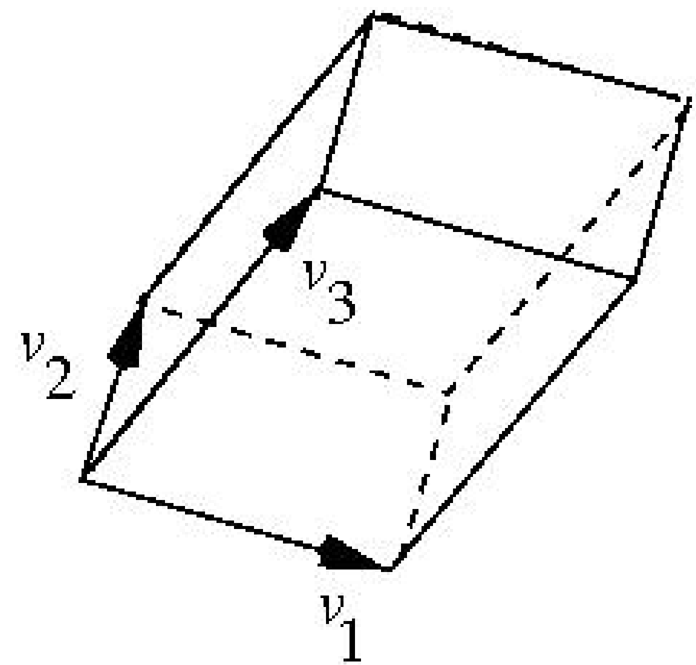
Problema *Demonstrar que não existem quatro pontos no plano tal que as distâncias entre eles sejam números inteiros ímpares.*



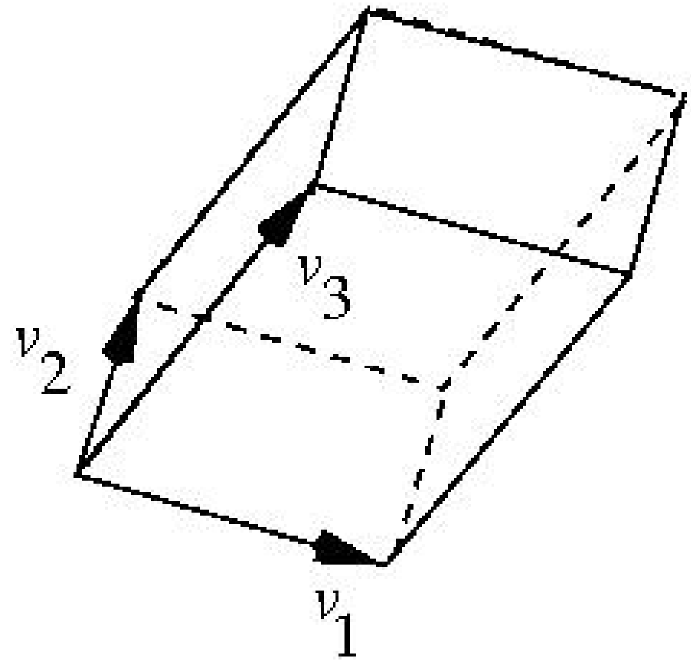
$$\textit{Volume(paralelepípedo)} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$



$$\mathit{Volume(paralelepípedo)} = \pm \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

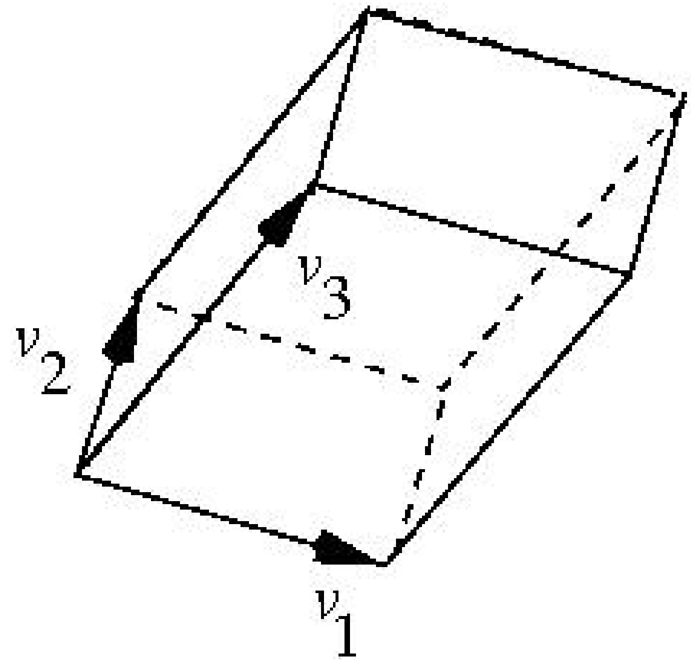


$$\textit{Volume(paralelepípedo)} = \pm\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$



$$\textit{Volume(paralelepípedo)} = \pm \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$

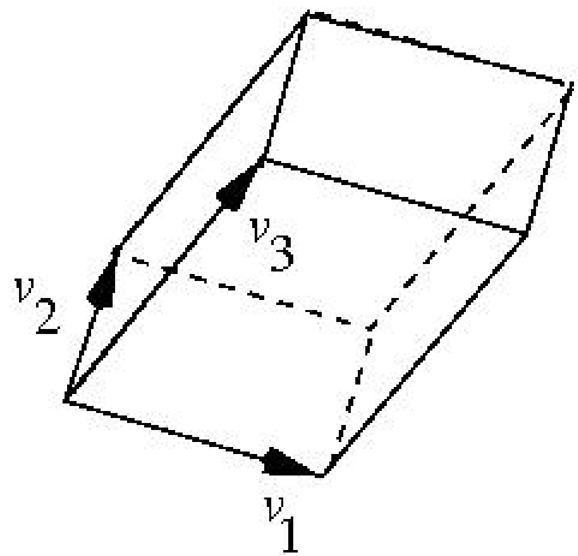
Sejam A, B, C, D *o quatro pontos.*



$$\textit{Volume(paralelepípedo)} = \pm \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$

Sejam A, B, C, D *o quatro pontos, e*

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}.$$

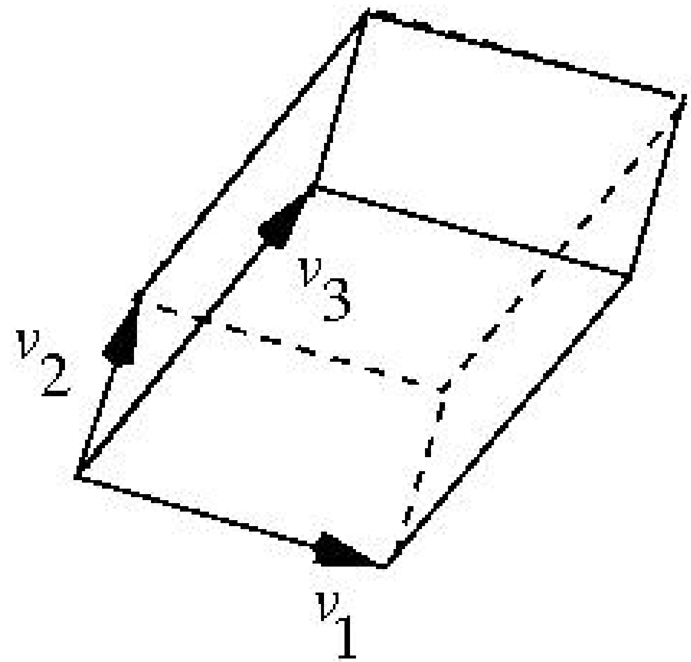


Volume(paralelepípedo) $= \pm \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$

Sejam A, B, C, D *o quatro pontos, e*

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}.$$

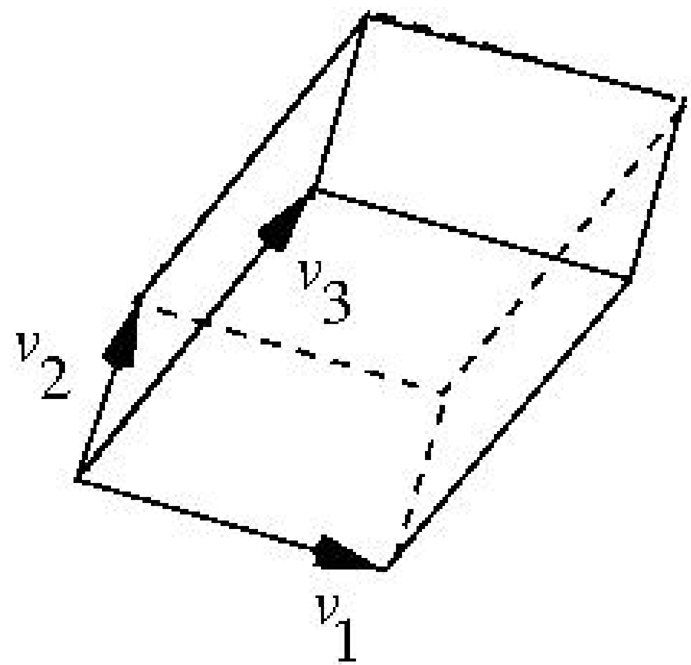
Devemos provar que é impossível que o paralelepípedo formado com $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ *tenha volume igual a zero, e que* AB, AC, AD, BC, BD, CD *sejam números ímpares.*



$$\textit{Volume(paralelepípedo)} = \pm \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$

Seja

$$M = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}).$$



$$\textit{Volume(paralelepípedo)} = \pm \det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$

Seja

$$M = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}).$$

e V *o volume do paralelípedo.*

$$\textit{Volume(paralelepípedo)} = \pm\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$$

Seja

$$M = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}).$$

e V o volume do paralelípedo.

Porque

$$\det(M^T M) = \det(M^T)\det(M) = \det(M)^2 = V^2 ...$$

$$V^2 = \det(M^T M) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_3} \end{pmatrix}.$$

$$V^2 = \det(M^T M) = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_3} \end{pmatrix}.$$

A lei dos cossenos

$$2\overrightarrow{v_j} \cdot \overrightarrow{v_k} = \|\overrightarrow{v_j}\|^2 + \|\overrightarrow{v_k}\|^2 - \|\overrightarrow{v_j} - \overrightarrow{v_k}\|^2.$$

Obtemos que

$$8V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-y^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-y^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix},$$

onde

$$a = \|\overrightarrow{v_1}\|, \quad b = \|\overrightarrow{v_2}\|, \quad c = \|\overrightarrow{v_3}\|,$$
$$x = \|\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}\|, \quad y = \|\overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_1}\|, \quad z = \|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}\|.$$

Obtemos que

$$8V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-z^2 & a^2+c^2-y^2 \\ a^2+b^2-y^2 & 2b^2 & b^2+c^2-x^2 \\ a^2+c^2-y^2 & b^2+c^2-x^2 & 2c^2 \end{vmatrix},$$

onde

$$a = \|\overrightarrow{v_1}\|, \quad b = \|\overrightarrow{v_2}\|, \quad c = \|\overrightarrow{v_3}\|,$$
$$x = \|\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}\|, \quad y = \|\overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_1}\|, \quad z = \|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}\|.$$

E agora trabalhamos modulo 8.

Se n *é ímpar,* $n = 2k + 1$*,*

Se n *é ímpar,* $n = 2k + 1$*,*

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Se n *é ímpar,* $n = 2k + 1$*,*

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

O número $4k(k+1)$ *é um múltiplo de* 8*.*

Se n *é ímpar*, $n = 2k+1$,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

O número $4k(k+1)$ *é um múltiplo de* 8. *Por isso o quadrado de um número ímpar é igual a 1 modulo* 8. *Obtemos que*

$$8V^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \equiv 4 (\mathit{mod}\ 8)$$

Se n *é ímpar,* $n = 2k+1$,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

O número $4k(k+1)$ *é um múltiplo de* 8*. Por isso o quadrado de um número ímpar é igual a 1 modulo* 8*. Obtemos que*

$$8V^2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \equiv 4(\textit{mod}\ 8)$$

e por isso $V^2 \neq 0$.

Problema *Provar que existe um número infinito de pontos*

$$\dots P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$$

no plano, com a propriedade seguinte: Para cada tres números inteiros distinctos a, b, c*, os pontos* P_a, P_b, P_c *sejam colineares se e só se*

$$a + b + c = 2014.$$

<u>**Problema**</u> *Provar que existe um número infinito de pontos*

$$\ldots P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$$

no plano, com a propriedade seguinte: Para cada tres números inteiros distinctos a, b, c*, os pontos* P_a, P_b, P_c *sejam colineares se e só se*

$$a + b + c = 2014.$$

(USAMO 2014)

$x \mapsto x - 671$ *transforma a condição de colinearidade:* P_a, P_b, P_c *sejam colineares se e só se*

$$a + b + c = 2014;$$

em: P_a, P_b, P_c *sejam colineares se e só se*

$$a + b + c = 1.$$

É natural procurar um modelo polinómico $P_x(p(x), q(x))$ *para as coordenadas dos pontos. A condição de colinearidade é*

$$\textit{Area}(P_a P_b P_c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p(a) & p(b) & p(c) \\ q(a) & q(b) & q(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvemos o determinante e obtemos

$$0 = \textit{Area}(P_a P_b P_c)$$
$$= p(a)q(b) + p(b)q(c) + p(c)q(a) - p(a)q(c) - p(b)q(a) - p(c)q(b)$$

$$p(a)q(b) + p(b)q(c) + p(c)q(a) - p(a)q(c) - p(b)q(a) - p(c)q(b) = 0.$$

$$p(a)q(b) + p(b)q(c) + p(c)q(a) - p(a)q(c) - p(b)q(a) - p(c)q(b) = 0.$$

Este deve acontecer se e só se $a+b+c = 1$*, ou se dois dos números* a, b, c *são iguais.*

$$p(a)q(b) + p(b)q(c) + p(c)q(a) - p(a)q(c) - p(b)q(a) - p(c)q(b) = 0.$$

Este deve acontecer se e só se $a+b+c = 1$*, ou se dois dos números* a, b, c *são iguais. Então o lado esquerdo, que é um polinomio em* a, b, c*, deve ser de forma*

$$(a + b + c - 1)(b - a)(c - b)(a - c)R(a, b, c),$$

onde $R(a, b, c)$ *é um polinomio.*

$$p(a)q(b)+p(b)q(c)+p(c)q(a)-p(a)q(c)-p(b)q(a)-p(c)q(b)=0.$$

Este deve acontecer se e só se $a+b+c=1$*, ou se dois dos números* a,b,c *são iguais. Então o lado esquerdo, que é um polinomio em* a,b,c*, deve ser de forma*

$$(a+b+c-1)(b-a)(c-b)(a-c)R(a,b,c),$$

onde $R(a,b,c)$ *é um polinomio. Podemos tentar o caso mais simples,*

$$R(a,b,c)=1.$$

$P_x(p(x), q(x))$:

Os polinomios $p(x)$ y $q(x)$ não podem ser quadráticos, porque neste caso os termos de grau 4 na expressão

$$p(a)q(b) + p(b)q(c) + p(c)q(a) - p(a)q(c) - p(b)q(a) - p(c)q(b)$$

cancelam-se completamente, mas a expressão

$$(a + b + c - 1)(b - a)(c - b)(a - c)$$

tem termos de grau 4.

$P_x(p(x), q(x))$:

Os polinomios $p(x)$ *y* $q(x)$ *não podem ser quadráticos, porque neste caso os termos de grau* 4 *na expressão*

$$p(a)q(b) + p(b)q(c) + p(c)q(a) - p(a)q(c) - p(b)q(a) - p(c)q(b)$$

cancelam-se completamente, mas a expressão

$$(a + b + c - 1)(b - a)(c - b)(a - c)$$

tem termos de grau 4*. Por isso* $p(x)$ *de grau 1 e* $q(x)$ *de grau 3. Podemos escolhar* $p(x) = x$*.*

$P_x(p(x), q(x))$:

Portanto devemos ter

$$(c-b)Q(a) + (a-c)Q(b) + (b-a)Q(c)$$
$$= (a+b+c-1)(b-a)(c-b)(a-c).$$

$P_x(p(x), q(x))$:

Portanto devemos ter

$$\begin{aligned}&(c-b)Q(a)+(a-c)Q(b)+(b-a)Q(c)\\&\quad=(a+b+c-1)(b-a)(c-b)(a-c).\end{aligned}$$

Seja $Q(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$;

$P_x(p(x), q(x))$:

Portanto devemos ter

$$\begin{aligned}(c-b)Q(a) + (a-c)Q(b) + (b-a)Q(c) \\ = (a+b+c-1)(b-a)(c-b)(a-c).\end{aligned}$$

Seja $Q(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; *observamos que a parte linear de* $Q(x)$ *cancela-se na equação, por isso podemos escolher*

$$Q(x) = x^3 + \alpha x^2.$$

$P_x(p(x), q(x))$:

Portanto devemos ter

$$(c-b)Q(a)+(a-c)Q(b)+(b-a)Q(c)$$
$$=(a+b+c-1)(b-a)(c-b)(a-c).$$

Seja $Q(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$; *observamos que a parte linear de* $Q(x)$ *cancela-se na equação, por isso podemos escolher*

$$Q(x)=x^3+\alpha x^2.$$

Para $a=0, b=-1, c=1$ *obtemos*

$$-2Q(0)-Q(-1)-Q(1)=2,$$

então $\alpha=-1$.

Obtemos que a familia de pontos

$$P_n = (n - 671, (n - 671)^3 - (n - 671)^2).$$

satisfaz a condição que para cada tres números inteiros distinctos a, b, c, *os pontos* P_a, P_b, P_c *são colineares se e só se*

$$a + b + c = 2014.$$

Problema *Sejam* A *e* B *matrized de dimenção* 3×3 *matrices. Demonstrar que*

$$\mathit{det}(AB - BA) = \frac{\mathit{tr}((AB - BA)^3)}{3}.$$

Teorema Cayley-Hamilton *Cada* $n\times n$ *matriz* A *satisface sua equação característica*

$$P_A(A) = \mathcal{O}_n.$$

onde $P_A(\lambda) = \det(\lambda\mathcal{I}_n - A)$.

O Teorema Cayley-Hamilton dá-nos

$$(AB - BA)^3 + a_1(AB - BA)^2 + a_2(AB - BA) + a_3\mathcal{I}_3 = \mathcal{O}_3,$$

onde

$$\det[\lambda I_3 - (AB - BA)] = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3.$$

O Teorema Cayley-Hamilton dá-nos

$$(AB - BA)^3 + a_1(AB - BA)^2 + a_2(AB - BA) + a_3\mathcal{I}_3 = \mathcal{O}_3,$$

onde

$$\det[\lambda I_3 - (AB - BA)] = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3.$$

Neste caso

$$a_1 = -\textit{tr}(AB - BA) \text{ e } a_3 = -\det(AB - BA).$$

$$(AB - BA)^3 - \textit{\textbf{tr}}(AB - BA)(AB - BA)^2 + a_2(AB - BA) \\ - \det(AB - BA)\mathcal{I}_3 = \mathcal{O}_3,$$

$$\mathit{tr}[(AB-BA)^3]-\mathit{tr}(AB-BA)a_1\mathit{tr}[(AB-BA)^2]$$
$$+a_2\mathit{tr}[(AB-BA)]-\det(AB-BA)\mathit{tr}(\mathcal{I}_3)=\mathcal{O}_3,$$

$$tr[(AB - BA)^3] - 3\det(AB - BA) = 0.$$

Seja $SL(2,\mathbb{C})$ *o grupo dos matrizes de dimenção* 2×2 *cujos determinantes são iguais a zero:*

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Seja $SL(2,\mathbb{C})$ o grupo dos matrizes de dimenção 2×2 cujos determinantes são iguais a zero:

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Theorema *Sejam $A, B \in SL(2\mathbb{C})$. Então*

$$\textit{tr}(AB) - (\textit{tr}A)(\textit{tr}B) + \textit{tr}(AB^{-1}) = 0.$$

Problema *Demonstrar que não existem matrizes* A *e* B *de dimenção* 2×2 *tal que o comutador*

$$C = [A, B] = AB - BA$$

é nozero e $AC = CA$, $BC = CB$.

Problema *Demonstrar que não existem matrizes A e B de dimenção 2×2 tal que o comutador*

$$C = [A, B] = AB - BA$$

é nozero e $AC = CA$, $BC = CB$.

*(*American Mathematical Monthly*)*

Supor que C *existe.*

Temos

$$AB^2 - BA^2 = (AB - BA)B + B(AB - BA) = CB + BC = 2BC.$$

Temos

$$AB^2 - BA^2 = (AB - BA)B + B(AB - BA) = CB + BC = 2BC.$$

Seja

$$P_B(\lambda) = \lambda^2 + r\lambda + s.$$

Temos

$$AB^2 - BA^2 = (AB - BA)B + B(AB - BA) = CB + BC = 2BC.$$

Seja

$$P_B(\lambda) = \lambda^2 + r\lambda + s.$$

Pelo teorema Cayley-Hamilton

$$P_B(B) = 0.$$

Temos

$$AB^2 - BA^2 = (AB - BA)B + B(AB - BA) = CB + BC = 2BC.$$

Seja

$$P_B(\lambda) = \lambda^2 + r\lambda + s.$$

Pelo teorema Cayley-Hamilton

$$P_B(B) = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2 = AP_B(B) - P_B(B)A = AB^2 - B^2A + r(AB - BA) \\ = 2BC + rC. \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}_2 = AP_B(B) - P_B(B)A = AB^2 - B^2A + r(AB - BA) = 2BC + rC.$$

Porque $AC = CB$ *e* $BC = CB$

$$\mathcal{O}_2 = A(2BC + rC) - (2BC + rC)A = 2(AB - BA)C = 2C^2.$$

$\mathcal{O}_2 = AP_B(B) - P_B(B)A = AB^2 - B^2A + r(AB - BA) = 2BC + rC.$

Porque $AC = CB$ *e* $BC = CB$

$\mathcal{O}_2 = A(2BC + rC) - (2BC + rC)A = 2(AB - BA)C = 2C^2.$

Por isso $C^2 = \mathcal{O}_2$.

$C^2 = \mathcal{O}_2$

Numa base

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$C^2 = \mathcal{O}_2$

Numa base

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então C comute só com polinomios em C*.*

$C^2 = \mathcal{O}_2$

Numa base

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então C comute só com polinomios em C*.*

Se $A = Q(C)$ *e* $B = R(C)$ *então* $C = \mathcal{O}_2$*.*

$C^2 = \mathcal{O}_2$

Numa base

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então C comute só com polinomios em C.

Se $A = Q(C)$ *e* $B = R(C)$ *então* $C = \mathcal{O}_2$*!!!*

Mais problemas

Problema *Determinar todos os números no interval* $[-2015, 2015]$ *que podem ser iguais a um determinante de dimenção* 11×11 *com elementos iguais a* 1 *ou* -1.

Problema *Demonstrar que*

$$\begin{vmatrix} (x^2+1)^2 & (xy+1)^2 & (xz+1)^2 \\ (xy+1)^2 & (y^2+1)^2 & (yz+1)^2 \\ (xz+1)^2 & (yz+1)^2 & (z^2+1)^2 \end{vmatrix} = 2(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2.$$

Problema *Sejam $p < m$ números inteiros positivos. Demonstrar que*

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{p} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+1}{p} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \binom{m+p}{0} & \binom{m+p}{1} & \cdots & \binom{m+p}{p} \end{vmatrix} = 1.$$

Seja $(F_n)_n$ *a sequência de Fibonacci:* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Theorema de Cassini

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad \textit{para } n \geq 1.$$

<u>**Problema**</u> *Seja* n *um número inteiro positivo impar e* A *uma matriz de dimenção* $n \times n$ *tal que* $A^2 = \mathcal{O}_n$ *ou* $A^2 = \mathcal{I}_n$. *Demonstrar que*

$$\det(A + \mathcal{I}_n) \geq \det(A - \mathcal{I}_n).$$