UNA IDENTIDAD ALGEBRÁICA Y LOS DETERMINANTES CIRCULANTES

RĂZVAN GELCA

Continuamos nuestra serie dedicada a problemas de olimpiadas relacionadas a las matemáticas avanzadas, con un problema propuesto por el autor de este artículo para el concurso "Konhauser Problem Fest" en 2014.

Problema 1. Sean a y b dos números enteros que satisfacen $a + b = 2014$. Demuestre que el determinante

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & 3ab & -1 \\ -1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ 2b & -1 & a^2 & -b^2 \\ 0 & b & -1 & a \end{vmatrix}$$

es un multiplo de 61.

Para resolver este problema, sumamos la segunda, tercera y cuarta columna a la primera para obtener

$$\begin{vmatrix} a^3+b^3+3ab-1 & b^3 & 3ab & -1 \\ a^2+b^2+2ab-1 & a^2 & b^2 & 2ab \\ a^2-b^2+2b-1 & -1 & a^2 & -b^2 \\ a+b-1 & b & -1 & a \end{vmatrix}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} a^2+b^2+2ab-1 &= (a+b)^2-1 = 2014^2-1 = 2013 \times 2015 \\ &= 61 \times 33 \times 2015 \\ a^2-b^2+2b-1 &= a^2-(b-1)^2 = (a+b-1)(a-b+1) \\ &= 61 \times 33(a-b+1) \\ a+b-1 &= 2013 = 61 \times 33. \end{aligned}$$

Lo que queda de demostrar es que $a^3+b^3+3ab-1$ es divisible por 61. Denotemos $c = -1$ para transformar esta expresión en $a^3+b^3+c^3-3abc$. En este momento podemos utilisar la factorización

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca). \tag{1}$$

De aqui obtenemos que $a^3+b^3+c^3 = a^3+b^3+3ab-1$ es divisible por $a+b+c = a+b-1 = 2013 = 61 \times 33$, y por que cada entrada de la primera columna es divisible por 61, concluimos que el determinante es divisible por 61.

Regresamos a la fórmula (1). Claro que esta fórmula se puede verificar por la multiplicación directa de los factores en la parte derecha, pero hay varios métodos mas elegantes para demonstrarla. Por ejemplo si denotamos $a+b=s$ entonces

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc &= a^3+b^3+3abs-3abs+c^3-3abc\\ &= (a+b)^3-3abs+c^3-3abc\\ &= s^3-3abs+c^3-3abc\\ &= (s+c)(s^2+c^2-sc-3ab)\\ &= (a+b+c)[(a+b)^2+c^2-(a+b)c-3ab)\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).\end{aligned}$$

Otra posibilidad es considerar el polinomio

$$P(t)=(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc,$$

con raíces a, b, y c. Sumando las tres igualdades $P(a)=0$, $P(b)=0$, $P(c)=0$ obtenemos

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)(a+b+c)$$
$$-3abc=0.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)(a+b+c)\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).\end{aligned}$$

Pero la idea más profonda, y con posibilidades de generalización, es calcular el *determinante circulante*

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix},$$

en dos modos:

1. usando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-abc-abc-abc$$

2. sumando la segunda y la tercera columna a la primera y factorizando $a+b+c$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}.$$

En la segunda situación podemos tambien sumar la segunda columna multiplicada por la raiz de la unidad $\epsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y la tercera multiplicada por $\epsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a la primera para obtener

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\epsilon b+\epsilon^2 c & b & c \\ c+\epsilon a+\epsilon^2 b & a & b \\ b+\epsilon c+\epsilon^2 a & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+\epsilon b+\epsilon^2 c & b & c \\ \epsilon(a+\epsilon b+\epsilon^2 c) & a & b \\ \epsilon^2(a+\epsilon b+\epsilon^2 c) & c & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+\epsilon b+\epsilon^2 c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ \epsilon & a & b \\ \epsilon^2 & c & a \end{vmatrix}.$$

De mismo modo, trabajando con ϵ^2 en lugar de ϵ, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+\epsilon^2 b+\epsilon c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ \epsilon^2 & a & b \\ \epsilon & c & a \end{vmatrix}.$$

De aqui no es difícil deducir que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c). \tag{2}$$

Esta fórmula se puede generalizar para todos los determinantes circulantes de forma siguiente

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}(a_0 + \epsilon^j a_1 + \cdots + \epsilon^{(n-1)j} a_{n-1}),$$

donde $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. La primera demonstración de esta identidad fue publicada por Luigi Cremona en [2]. La demonstación de Cremona utilice la matriz de la transformada de Fourier discreta

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Si denotamos $f_j(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j t^j$, entonces

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} f(1) & f(\epsilon) & \cdots & f(\epsilon^{n-1}) \\ f(1) & \epsilon f(\epsilon) & \cdots & \epsilon^{n-1} f(\epsilon^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(1) & \epsilon^{n-1} f(\epsilon) & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} f(\epsilon^{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \epsilon & \cdots & \epsilon^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \cdots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\epsilon) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\epsilon^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Tomando determinantes y utilizando el hecho de que la transformada de Fourier es invertible y por tanto el determinante de su matriz es distinto a cero, obtenemos la fórmula de Cremona. Este calculo demuestra que la transformada de Fourier discreta diagonaliza la matriz circulante. La relación entre matrices circulantes y la transformada de Fourier discreta es el motivo por que los matrices circulantes son importantes en telecomunicaciones y en procesamiento de señales.

Volviendo a la fórmula (2), observamos que el grupo de permutaciones que actua en las filas del determinante es el grupo ciclico con tres elementos, $S_3 = \{1, \rho, \rho^2\}$. Observamos tambien que hay tres homomorfismos de este grupo en el grupo multiplicativo de los numeros complejos no iguales a cero:

$$\chi_j : S_3 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad j = 0, 1, 2,$$

definidos por $\chi_j(\rho) = \epsilon^j$. Los tres homomorfismos forman un grupo ellos mismos (con la operación de multiplicación); denotemos este grupo $\widehat{S_3}$. En este caso la formula (2) se puede reformular como

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \prod_{\chi \in \widehat{S_3}} (\chi(1)a + \chi(\rho)b + \chi(\rho^2)c).$$

Motivado por problemas de teoría de números, Richard Dedekind generalizó esta identidad de forma siguente. Dado un grupo finito abeliano $G = g_1, g_2, \ldots, g_n$, consideremos una sequencia $a_{g_1}, a_{g_2}, \ldots, a_{g_n}$.

Definamos el determinante $\det(a_{g_j g_k^{-1}})$, cuyo jk entrada es $a_{g_j g_k^{-1}}$. Dedekind demostro que

$$\det(a_{g_j g_k^{-1}}) = \prod_{\chi \in \widehat{G}} \left(\sum_{g \in G} \chi(g) a_g \right)$$

donde $\widehat{G}$ es el grupo de homomorfismos de G en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Mencionamos esta identidad de Dedekind aqui por su importancia como el punto de nacimiento de la teoría de representaciones de grupos. Mas detalles de esta historia se pueden hallar en el articulo de Keith Conrad [1].

Concluimos nuestra discusión con un ejemplo de problema que apareció en [3] y para cuyo solución se puede aplicar la identidad (1):

Problema 2. Sean x, y, z números reales distintos. Demostrar que

$$\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} \neq 0.$$

References

[1] K. Conrad, *The origin of representation theory*, preprint, http://www.math.uconn.edu/kconrad/articles/groupdet.pdf

[2] L. Cremona, *Intorno ad un teorema de Abel*, Annali di Scienze Matematiche i Fisiche, 7(1856), 99-105.

[3] R. Gelca, T. Andreescu, *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.

Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, TX 79409

E-mail address: rgelca@gmail.com